3年　1章　多項式　(1)

〈この章で学習するこがら〉

2年までは多項式どうしの加法、減法を学んだ。この章では多項式どうしの乗法を学び、文字を使った式やその計算を使って、数や図形の性質を証明することについて考えていきましょう。

さて多項式ってなんだっけ？

㊕ 単項式　とは・・ $2a$ や $3x^2$, $\frac{1}{3}xy$ などのように、数や文字についての乗法だけで作られた式のこと。1つの文字や1つの数、例えば x や -5 なども単項式と考える。

多項式　とは・・ $2a+2\pi r$ や $3x+10$, $2a^2-5a+1$ などのように、単項式の和の形で表された式を多項式といい、その１つ１つの単項式を多項式の項という。

ついでに次数って？

単項式の次数　・・・かけられている文字の個数

例えば　$3ab$ の次数は２

$-4x^2y$ の次数は３

$$3ab = 3 \times \overbrace{a \times b}^{2個}$$

$$-4x^2y = -4 \times \overbrace{x \times x \times y}^{3個}$$

多項式の次数　・・・各項の次数のうちでもっとも大きいもの

例えば　x^3+4x^2-5x　では各項の次数は右のようになる。

このうちもっとも大きいものは３であるからこの多項式の次数は３となる。

$$\underset{次数3}{x^3} + \underset{次数2}{4x^2} + \underset{次数1}{(-5x)}$$

また次数が１の式（単項式でも多項式でも）を1次式、次数が２の式を２次式という。

1節　多項式の計算

1 多項式と単項式の乗除

（単項式）×（多項式）は**<u>分配法則</u>**を使って計算する。

○×(□＋△)
＝○×□＋○×△

○×(□－△)
＝○×□－○×△

P10　〈例１〉分配法則を使う計算

２年までの計算と比べてみよう　　１年のときの計算は・・

(1)
$$2a(\boxed{3a}-5b)$$
$$=2a\times\boxed{3a}-2a\times 5b$$
$$=6a^2-10ab$$

←

$$2(\boxed{3a}-5b)$$
$$=2\times\boxed{3a}-2\times 5b$$
$$=6a-10b$$

←

$$2(\boxed{3a}-5)$$
$$=2\times\boxed{3a}-2\times 5$$
$$=6a-10$$

こうやって並べてみると
文字の種類が増えたり、次数が上がっただけ
ということがわかるね。

(2)
$$(x-2y+5)\times(-3x)$$
$$=x\times(-3x)-2y\times(-3x)+5\times(-3x)$$
$$=-3x^2+6xy-15x$$

やってみよう　P10　たしかめ１、問２をノートにやってみよう。

P11　〈例２〉　分配法則を２回使う計算　→　分配法則を使った後、同類項があったら、まとめよう。

文字の部分が次数も含めて同じ項のこと

$$2x(x+3)+x(2-x)$$
$$=2x^2+6x+2x-x^2$$
$$=2x^2-x^2+6x+2x$$
$$=x^2+8x$$

やってみよう　P11　問２をノートにやりましょう。余力がある人はもっと練習も！

P11　〈例３〉　(多項式)÷(単項式)　→　わることは逆数をかけることと同じ

逆数とはかけると１になる数または式のこと

(1)　$(4xy^2+6x^2y)\boxed{\div 2x}$

$2x$ の逆数をかける

$$=(4xy^2+6x^2y)\boxed{\times\frac{1}{2x}}$$
$$=4xy^2\times\frac{1}{2x}+6x^2y\times\frac{1}{2x}$$
$$=\frac{4xy^2}{2x}+\frac{6x^2y}{2x}$$
$$=2y^2+3xy$$

$2x$ の逆数は・・

$$2x\times\boxed{\frac{1}{2x}}=1$$

が $2x$ の逆数

★(2)　$(4a^2+ab)\div\frac{1}{2}a$

$\frac{1}{2}a=\frac{a}{2}$ のこと

ここではまだ割り算のままだよ

$$=(4a^2+ab)\boxed{\div\frac{a}{2}}$$

$\frac{a}{2}$ の逆数をかける

$$=(4a^2+ab)\boxed{\times\frac{2}{a}}$$
$$=4a^2\times\frac{2}{a}+ab\times\frac{2}{a}$$
$$=\frac{4a^2\times 2}{a}+\frac{ab\times 2}{a}$$
$$=8a+2b$$

★要**注意**!!　まちがい多発!

$\frac{1}{2}a$ の逆数を $2a$ とするミスが非常に多いので気をつけましょう。

$\frac{1}{2}a\times 2a=a^2$　となり、**かけても１にはならない**ね。

だから↑で $\frac{1}{2}a$ を $\frac{a}{2}$ としてから逆数にしているんだね。

やってみよう　P11　たしかめ２、問3をノートにやりましょう。

余力のある人はもっと練習も！

2 多項式の乗法

■いよいよ（多項式）×（多項式）の計算方法です

結論からいうと・・・

$$(a+b)(c+d)=\overset{①}{ac}+\overset{②}{ad}+\overset{③}{bc}+\overset{④}{bd}$$

となる。

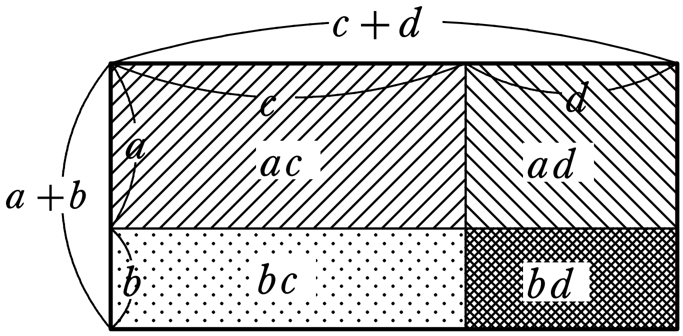
前半の $ac+ad$ は $(a+b)$ の b の項を隠して a のみを後ろの $(c+d)$ に分配法則

後半の $bc+bd$ は $(a+b)$ の a の項を隠して b のみを後ろの $(c+d)$ に分配法則

ここで２項×２項は４項の多項式になるのはなぜでしょう？

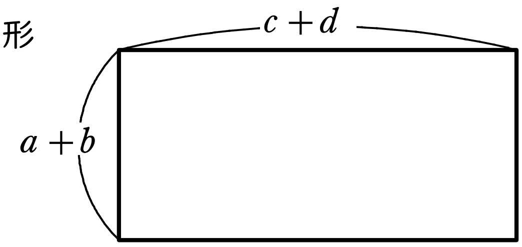
図を使って説明しましょう

縦 の長さが $a+b$， 横の長さが $c+d$ の長方形があります。



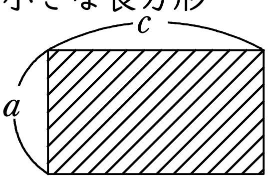
ここで $(a+b)(c+d)$ は縦×横なので長方形の面積を表しています。

大きな長方形

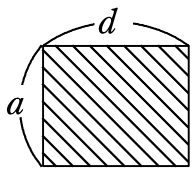


は

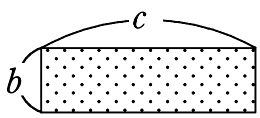
小さな長方形



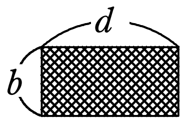
と



と



と



の４つで構成されているので、

大きな長方形の面積　$(a+b)(c+d)$　は

それぞれの面積　ac 、 ad 、 bc 、 bd　の和になる。

すなわち

$$\boxed{(a+b)(c+d)=ac+ad+bc+bd}$$　である。

今度はこのことを式を使って説明してみよう。

$$
\begin{aligned}
&(a+b)(c+d) && \text{ここで } (c+d)=M \text{ とおく}\\
&=(a+b)M && \text{分配法則でかっこをはずす}\\
&=aM+bM && M \text{をもとに戻す}\\
&=a(c+d)+b(c+d) && \text{分配法則でかっこをはずす}\\
&=ac+ad+bc+bd
\end{aligned}
$$

やってみよう

P12　問１　$(a+b)(c+d)=ac+ad+bc+bd$ であることを

$a+b=N$ とおいて、説明してみよう。

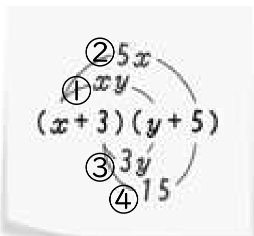
単項式や多項式の積の形の式を、かっこをはずして単項式の和の形に表すことを、はじめの式を**展開する**という。

P13〈例１〉次の式を展開しよう。

(1)　$(x+3)(y+5)$

$=xy+5x+3y+15$

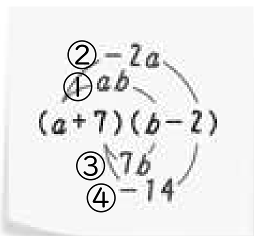
　①　②　③　④



(2)　$(a+7)(b-2)$　符号も含めてかけるよ

$=ab-2a+7b-14$

　①　②　③　④



やってみよう

P13　たしかめ１

P13〈例２〉　展開した後、同類項があればまとめなければならない

$$
\begin{aligned}
&(3x+2)(x-4) \\
=\;&3x^2-12x+2x-8 \\
=\;&3x^2-10x-8
\end{aligned}
$$

展開する

同類項をまとめる

やってみよう

P13　たしかめ２、問２。　余力があればもっと練習

P13〈例３〉　かっこの中の多項式の項が多い場合

$$(a+3)(a+2b-4)$$

$$=a(a+2b-4)+3(a+2b-4)$$

$$(a+3)(a+2b-4)$$

$$=a^2+2ab-4a+3a+6b-12$$

① ② ③ ④ ⑤ ⑥

同類項をまとめる

$$=a^2+2ab-a+6b-12$$

3〉 乗法公式

◆$x+a$ と $x+b$ の積◆

ここで考えよう！

P13〈例1〉～問2を展開したとき、どのようなときに同類項をまとめることが出来、どのようなときにまとめることが出来ないのかみてみましょう。

同類項をまとめることが出来ないパターンの問題	
例１(1)	$(x+3)(y+5)$
(2)	$(a+7)(b-2)$
た１(1)	$(x+6)(y+2)$
(2)	$(a-3)(b+2)$
問2 (1)	$(a-b)(c-d)$
(2)	$(2x+1)(y-7)$

同類項をまとめることが出来るパターンの問題	
例２	$(3x+2)(x-4)$
た２(1)	$(x+7)(x+4)$
(2)	$(4x-3)(2x+1)$
問2 (3)	$(x+2)(x+4)$
(4)	$(x-2)(x-3)$
(5)	$(2a+b)(a+3b)$
(6)	$(4x-1)(3x-2)$

それぞれの（　）内の多項式の構成をよく観察してみましょう。

どの（　）内の多項式も1次式ですが、

まとめることが出来ないパターンの問題は

（　）内の1次式の文字が２つの（　）で違っています。

たとえば１つめの（　）内の文字は x だけど２つめの（　）内は y のように。

一方、まとめることが出来るパターンの問題は

２つの（　）内の1次式の文字は　1元（文字1種類、たとえば x だけ）

であっても、2元（文字2種類、たとえば a と b ）であっても**全く同じ**です。

今後は問題の式を見ただけでこの問題は展開した後同類項をまとめることが出来るか出来ないか判断することが出来ます。

さらに！！

文字の係数が1であるものについてくわしくみてみましょう。

たしかめ１（1）$(x+7)(x+4)$　問２（3）$(x+2)(x+4)$　（4）$(x-2)(x-3)$

上の3題について、ノートで自分の展開した途中式をよく観察してみましょう。

たI（1）

$(x+7)(x+4)$

$=x^2\underbrace{+4x+7x}+28$

$=x^2\underbrace{+11x}+28$

問2（3）

$(x+2)(x+4)$

$=x^2\underbrace{+4x+2x}+8$

$=x^2\underbrace{+6x}+8$

問2（4）

$(x-2)(x-3)$

$=x^2\underbrace{-3x-2x}+6$

$=x^2\underbrace{-5x}+6$

どの式も展開したあとの2項目と3項目が x の項で同類項なのでまとめることが出来る。同類項は係数をたすことによってまとめられる。それぞれの係数はもとの（　）内の定数の部分であるから、そこに着目すると‥

$$(x+\bigcirc)(x+\square)$$

$$=\underbrace{x^2}_{①}+\underbrace{\square x+\bigcirc x}_{②\qquad ③}+\underbrace{\bigcirc\times\square}_{④}$$

$$=\underbrace{x^2}_{①}+\underbrace{(\bigcirc+\square)}_{②+③}x+\underbrace{\bigcirc\times\square}_{④}$$

x^2 の項の係数は1、x の項の係数は $\bigcirc+\square$ 、定数の項は $\bigcirc\times\square$ となっていることがわかる。

たしかめI(1)をあてはめてみると

$\bigcirc=7$、$\square=4$　として、

$(x+7)(x+\boxed{4})$

$=x^2+(7+\boxed{4})x+7\times\boxed{4}$

$=x^2+11x+28$

問２(４)をあてはめてみる

$\bigcirc=-2$、$\square=-3$

$(x-2)(x\boxed{-3})$

$=x^2+\{(-2)+(\boxed{-3})\}x+(-2)\times(\boxed{-3})$

$=x^2-5x+6$

この２問を比較してもわかる通り、

x^2 の係数は１、x の係数はもとの２つの（　）内の数字の部分の和で、

定数の項はもとの２つの（　）内の数字の部分の積になっている

乗法公式$\boxed{1}$

$$(x+\bigcirc)(x+\square)$$
$$=x^2+(\underbrace{\bigcirc+\square}_{\text{足して係数}})x+\underbrace{\bigcirc\times\square}_{\text{かけて定数}}$$

今後はこれを公式として利用しよう。
ただしこの公式が利用できるのは
$(x+\bigcirc)(x+\square)$
この部分が同じとき！

公式１

$$(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$$

P14〈例1〉$(x+2)(x+7)$

$=x^2+(2+7)x+2\times7$

$=x^2+9x+14$

この途中式は極力頭の中で出来るように練習しよう

P15〈例2〉$(x+3)(x-4)$

$=x^2+\{3+(-4)\}x+3\times(-4)$

$=x^2-x-12$

やってみよう

P14　たしかめ１、P15たしかめ２、問1　余力があればもっと練習！

ノートには、**必ず問題の式を書いて**、途中式は極力頭の中でやって、答えを書きましょう。　この後出てくる「因数分解」でこの作業の効力が発揮されます。

◆和の平方、差の平方◆

$(a+b)^2$, $(a-b)^2$ の展開について公式を作ってみよう。

$$
\begin{aligned}
&(a+b)^2\\
&=(a+b)(a+b)\\
&=a^2+ab+ba+b^2\\
&=a^2+2ab+b^2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&(a-b)^2\\
&=(a-b)(a-b)\\
&=a^2-ab-ba+b^2\\
&=a^2-2ab+b^2
\end{aligned}
$$

乗法公式$\boxed{2}$

和の平方

$$(\bigcirc+\square)^2$$

$$=\underbrace{\bigcirc^2}_{\text{2乗}}+\underbrace{2\times\bigcirc\times\square}_{\text{かけて2倍}}+\underbrace{\square^2}_{\text{2乗}}$$

乗法公式$\boxed{3}$

差の平方

$$(\bigcirc-\square)^2$$

$$=\underbrace{\bigcirc^2}_{\text{2乗}}-\underbrace{2\times\bigcirc\times\square}_{\text{かけて2倍}}+\underbrace{\square^2}_{\text{2乗}}$$

和の平方と差の平方の違いはここの符号だけ！

P16〈例３〉 $(x+a)^2$ の展開

$\bigcirc=x$、 $\square=3$ のとき

$$
\begin{aligned}
&(x+3)^2\\
&=x^2+2\times x\times 3+3^2 \quad \leftarrow \bigstar\\
&=x^2+6x+9
\end{aligned}
$$

〈例４〉 $(x-a)^2$ の展開

$\bigcirc=x$、 $\square=8$ のとき

$$
\begin{aligned}
&(x-8)^2\\
&=x^2-2\times x\times 8+8^2 \quad \leftarrow \bigstar\\
&=x^2-16x+64
\end{aligned}
$$

★この行の途中式は極力 頭の中で出来るように練習しましょう

（２乗、かけて２倍、２乗）と唱えながら計算しよう！

（両はじ２乗、真ん中かけて２倍）でもいいね。

公式２

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$$

公式３

$$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$$

やってみよう

P16 たしかめ３、たしかめ４、問３

◆和と差の積◆

a と b の和と差の積　$(a+b)(a-b)$　の展開について公式を作ってみよう。

$$
\begin{aligned}
&(a+b)(a-b)\\
&=a^2\cancel{-ab}\cancel{+ab}-b^2\\
&=a^2-b^2
\end{aligned}
$$

x と a の和と差の積だと・・

$$
\begin{aligned}
&(x+a)(x-a)\\
&=x^2\cancel{-ax}\cancel{+ax}-a^2\\
&=x^2-a^2
\end{aligned}
$$

同類項となる真ん中の項がプラマイゼロになって消えてしまうね

乗法公式4

$(\bigcirc+\square)(\bigcirc-\square)$

和　と　差　の積は

$=\bigcirc^2-\square^2$

2乗の差

公式４

$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$

P17〈例５〉

$(x+6)(x-6)$　← x と６の和と x と６の差の積は

$=x^2-6^2$　←x と６の２乗の差

$=x^2-36$

やってみよう

P17たしかめ５、問４

余力のある人は　もっと練習！　←工夫して計算しよう！

これまでに出てきた公式をまとめてみましょう

乗法公式

$\boxed{1}$　$(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$

$\boxed{2}$　$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$

$\boxed{3}$　$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$

$\boxed{4}$　$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$

やってみよう

P17問５、もっと練習

どの公式を使うか、問題の式をよく見て展開しよう

公式を使うためには　問題の式がどんなときに　どの公式を利用するか　判断しなければなりません。
出来るだけ速く、正確に計算出来るようにするために大事なことは、**練習のみ**です。
練習量が多ければ多いほど、速く正確に計算出来るようになります！
さらに、**ここでの練習量が次の因数分解で威力を発揮します。**

たくさん練習して、公式を利用した基本的な展開が出来るようになったら…

■いろいろな式の展開を考えてみよう

Q　$(2x+1)(2x+3)$ を展開するにはどの公式を利用できるでしょう。

$$
\begin{aligned}
&(2x+1)(2x+3)\\
&=(2x)^2+(1+3)\times 2x+1\times 3\\
&=(2x)^2+4\times 2x+3\\
&=4x^2+8x+3
\end{aligned}
$$

比べてみよう

$$
\begin{aligned}
&(x+1)(x+3)\\
&=x^2+(1+3)x+1\times 3\\
&=x^2+4x+3
\end{aligned}
$$

２つの（　）内の文字の項が係数を含めて全く同じであることがわかります。
そこで、係数も含めてひとつの文字とみることによって、公式Ｉが利用出来るのです。
教科書では $2x$ を A と置き換えて計算しています。参考にしてみてください。

P18〈例6〉 どの公式を利用すればよいでしょうか

$$
\begin{aligned}
&(2x-\boxed{3y})^2\\
&=(2x)^2-2\times 2x\times \boxed{3y}+(\boxed{3y})^2\\
&=4x^2-12xy+9y^2
\end{aligned}
$$

公式３、差の平方だね

$$(\bigcirc-\square)^2$$
$$=\underbrace{\bigcirc^2}_{2乗}-\underbrace{2\times\bigcirc\times\square}_{かけて2倍}+\underbrace{\square^2}_{2乗}$$

やってみよう　P18　問6、問7　　もっと練習！

P19〈例7〉置き換えの問題

$(a+b-2)(a+b+2)$ の展開

２つの(　)内の多項式に共通する項を見つけ、ひとつの文字に置き換えよう。

$a+b=X$ とおくと

$$
\begin{aligned}
&(a+b-2)(a+b+2) && a+b \text{ を } X \text{ と置き換える}\\
&=(X-2)(X+2) && \text{公式４の利用}\\
&=X^2-2^2 && X \text{ をもとの } a+b \text{ に戻す}\\
&=(a+b)^2-4 && \text{公式２の利用}\\
&=a^2+2ab+b^2-4
\end{aligned}
$$

やってみよう

P19　問8　もっと練習！

P19〈例8〉複雑な式の展開・・式の展開と加法、減法を組み合わせた式を展開してみよう。

ひとつひとつ丁寧に公式を利用して順序正しく、符号に注意して展開しよう。

$$
\begin{aligned}
&2(x+5)^2-(x+3)(x-3) && \text{公式２、公式４でそれぞれ展開。展開した後も（　）はつけておくこと！}\\
&=2(x^2+10x+25)-(x^2-9) && \text{それぞれ分配法則で（　）を外す。特に後半は符号に注意！}\\
&=2x^2+20x+50-x^2+9 && \text{同類項をまとめる}\\
&=x^2+20x+59
\end{aligned}
$$

やってみよう

P19　問9、もっと練習！、P20　基本の問題

答え合わせをして、間違えた問題はどこで間違えたかまず確認して、
解き直ししましょう。さらに忘れたころにもう一度解いてみると実力もつくはず！