

3年 1章 多項式 (2)

2節 因数分解

① 因数分解

因数とは・・・？

$$6 = 2 \times 3$$

$$2ab = 2 \times a \times b$$

数6や、単項式 $2ab$ は、上のように積の形に表すことができる。

このとき、かけられたひとつひとつの数や文字をその数、単項式の**因数**という。

6の因数は 2, 3

$2ab$ の因数は 2, a , b となる。

比べてみよう

項とは・・・

多項式で足されたひとつひとつの単項式をその多項式の項といったね。

前節で、多項式や単項式の積の形の式を展開することを学習しました。

例えば $x(x-5) = x^2 - 5x$ $(x+2)(x+3) = x^2 + 5x + 6$

これらの等式の両辺を逆にしてみると・・・

$$x^2 - 5x = x(x-5) \qquad x^2 + 5x + 6 = (x+2)(x+3)$$

と表されるので、

多項式 $x^2 - 5x$ の因数は x , $x-5$

多項式 $x^2 + 5x + 6$ の因数は $x+2$, $x+3$ となります。

多項式をいくつかの因数の積として表すことを、その多項式を**因数分解する**という。

$$x^2 + 5x + 6 \xrightarrow{\text{因数分解}} (x+2)(x+3) \\ \xleftarrow{\text{展開}}$$

『因数分解する』と

『展開する』は逆向きだね

◆共通因数◆

多項式の各項に共通な因数があるとき、それがかっこの外にくくり出して式を因数分解することができる。

「共通因数をくくり出す」というよ

$$ma + mb + mc$$

各項の因数は・・・ m, a, m, b, m, c

各項に共通な因数は・・・ m だから

$$ma + mb + mc \\ = m(a + b + c)$$

共通因数 m をくくり出し、

残りの因数 a, b, c

を項として()内に並べる。

と因数分解することができる。

分配法則の逆だね。

P23 〈例2〉 次の式を因数分解してみよう。

$$x^2 + 2xy$$

各項の因数は・・・ $x, x, 2, x, y$

各項に共通な因数は・・・ x だから

$$x^2 + 2xy \\ = x(x + 2y)$$

慣れないうちは一つひとつ各項の因数を書出して共通因数と、()内に残る因数を調べよう。

今後はこの部分は頭の中で出来るように練習しよう。

と因数分解することができる。

★〈例3〉 次の式を因数分解してみよう。

(1) $3ax - 6ay$

各項の因数は・・・ $3, a, x, 2, 3, a, y$

$$3ax - 6ay \\ = 3a(x - 2y)$$

(2) $4ab + 2a$

各項の因数は・・・ $2, 2, a, b, 2, a$

$$4ab + 2a \\ = 2a(2b + 1)$$

?! 残りの項がないね!?

こんなときは・・・

$$2a = 2 \times a \times 1$$

として、因数を 2 と a と 1

にすればよいんだ。

〈注意〉 $3ax - 6ay$ は、 $a(3x - 6y)$ としても因数分解したことになるが、まだかっこの中の式に共通な因数 3 が残っている。このような場合には、(1)のように、できるかぎり因数分解しなければならない。

共通因数でくくり出す因数分解は分配法則の逆なので、因数分解できたと思ったら、すぐに逆向きに展開(分配法則)してみよう。もとに戻ればOK。
ただし上の〈注意〉のようなこともあるので気をつけよう。

やってみよう

P23 たしかめ1、問1

初めての因数分解です。まずは丁寧にやってみよう!

② 公式を利用する因数分解

Q $x^2 - 7x + 12$ を因数分解してみよう。

共通因数はないね・・・そんな時はどうすればよいのでしょうか。

乗法公式1の逆だよ

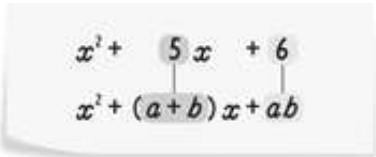
◆公式1' $x^2 + (a+b)x + ab = (x+a)(x+b)$ の利用◆

P24 〈例1〉 $x^2 + 5x + 6$ を因数分解してみよう。

公式の構造にあてはめてよく見てみると・・・

$x^2 + 5x + 6$ は公式1' で

$a + b = 5$ 、 $ab = 6$



したがって、和が5で積が6になる数 a, b をみつければよい。

たして5、かけて6になる
2数は・・・

積が+6になる組合せ	そのうち和が+5になるのは・・・
1と6 $1 \times 6 = 6$	$1 + 6 = 7$ ×
-1と-6 $(-1) \times (-6) = 6$	$-1 - 6 = -7$ ×
<u>2と3</u> <u>$2 \times 3 = 6$</u>	<u>$2 + 3 = 5$</u> <u>○</u>
-2と-3 $(-2) \times (-3) = 6$	$-2 - 3 = -5$ ×

たして+5 になる2数は
1+4, 2+3 だけでなく、-35+40,
569-564 など、無数にあるね。
というわけで、
かけて+6になる数から探していこう。
ちなみに積が+になるのは-どうしもあるよ。

したがって積が6で、和が5になる2数は 2と3であるから

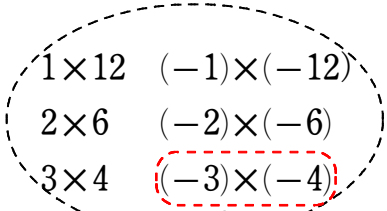
$a = 2, b = 3$ として、

$x^2 + 5x + 6 = (x + 2)(x + 3)$ と因数分解することができる。

Q $x^2 - 7x + 12$ を因数分解してみよう。

かけて+12、たして-7 となる2数を見つける

$x^2 - 7x + 12$
 $= (x - 3)(x - 4)$



-3と-4だね

$(x - 4)(x - 3)$ でも可

やってみよう

P24 たしかめ1、問1

P25 〈例2〉 $x^2 + x - 6$ を因数分解してみよう。

かけて-6、たして+1 となる2数を見つける

$$x^2 + x - 6 \\ = (x - 2)(x + 3)$$

$1 \times (-6)$ $(-1) \times 6$
 $2 \times (-3)$ $(-2) \times 3$

-2と3だね

かけてマイナスになる2数は一方はプラスでもう一方はマイナスだね。
 その場合、たしたときの符号はその2数の絶対値の大きい方の符号だよ。

やってみよう

P25 たしかめ2、問2、問3、もっと練習！

◆公式2' $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$

公式3' $a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$ の利用◆

P25 〈例3〉 $x^2 + 10x + 25$ を因数分解してみよう。

公式1' を利用してもよいけれど・・・

かけて25たして10となる2数をさがす
 5と5になるから
 $x^2 + 10x + 25 = (x + 5)(x + 5)$
 $= (x + 5)^2$

ここで終わりにしてはダメ！

和の平方になったね！

和の平方の公式の逆を利用してみよう。

両端の項をよく観察してみると、 x^2 の項は x の2乗、25は5の2乗になっているね。

さらに、真ん中の項 $10x$ は x と5をかけて2倍になっていることがわかる。

$$\begin{array}{r} x^2 \quad +10x \quad +25 \\ = x^2 \quad +2 \times x \times 5 \quad +5^2 \\ = (x+5)^2 \end{array}$$

両はじ2乗 真ん中かけて2倍

(両はじの項の係数が平方数になっている。)

ここで平方数を知っておくと便利です。さらに次の章でも活躍するので是非覚えましょう。

やってみよう

P25 たしかめ3、問4

平方数とはある自然数を2乗した数のこと

$1^2 = 1, 2^2 = 4, 3^2 = 9, 4^2 = 16, \dots, 19^2 = 361$

1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100,
 121, 144, 169, 196, 225, 256, 289, 324, 361

1～19の平方数、それが無理なら15までの平方数を覚えておきましょう。

◆公式4' $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$ の利用◆

P26 〈例4〉 $x^2 - 25$

$$= x^2 - 5^2$$

$$= (x + 5)(x - 5)$$

(x)と5の2乗の差だから
(x)と5の和と差の積に因数分解出来る。

ここでも2項とも平方数だということから
公式4' が利用できる判断出来るね。

やってみよう

P26 たしかめ4、問5

それぞれの公式の構造をしっかり 把握し、
どのような式のときにどの公式を利用できるか
判断出来るようにしましょう。

これまでにでてきた公式をまとめてみましょう

因数分解の公式

1' $x^2 + (a + b)x + ab = (x + a)(x + b)$

2' $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$

3' $a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$

4' $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$

このプリント P7 に
どの公式を利用できるか判断チャート
があるよ。参考にしてみよう。

やってみよう

P26 問6 似たような式が並んでいます。

どの公式を使えばよいかの根拠をはっきりさせ、今後に活かしましょう。

問7 ここからは実際にどの公式を利用するか自分で判断して因数分解をするよ。

このプリントP7 【公式判断チャート】を見ながらやってみよう。

次に学習する因数分解はこれまでにやってきたものを組み合わせたり、式を置き換えたりと複雑になります。
そこで、混乱しないためにも、

**今！ ここまでのところを何度も繰り返し問題を解きましょう。
量をこなすことが大切です。**

◆ いろいろな式の因数分解 ◆

ここからは少し複雑な因数分解の問題です。

P27 〈例5〉 まずはじめに共通因数があればくり出す。

さらに公式が利用出来るか判断する。

$$\begin{aligned}
 & 2x^2 + 4x - 16 \\
 &= 2(x^2 + 2x - 8) \\
 &= 2(x-2)(x+4)
 \end{aligned}$$

} 共通因数2をくり出す
} かっこの中を公式1' で因数分解する

やってみよう

P27 たしかめ5、問8

P27 〈例6〉 単項式の置き換え

2次の項の係数が平方数
ということに着目しよう！

(1) $4x^2 + 4x + 1$

$$\begin{aligned}
 &= (2x)^2 + 2 \times 2x \times 1 + 1^2 \\
 &= (2x + 1)^2
 \end{aligned}$$

両端2乗,真ん中かけて2倍
だから和の平方に因数分解
出来るね。(公式2')

(2) $9x^2 - 4y^2$

$$\begin{aligned}
 &= (3x)^2 - (2y)^2 \\
 &= (3x + 2y)(3x - 2y)
 \end{aligned}$$

3x と 2y の2乗の差
だから3x と 2y の和と差の積
に因数分解出来るね。(公式4')

やってみよう

P27 問9、問10、余力があればもっと練習！

P27 〈例7〉 多項式の置き換え

与えられた式をまずはよく観察しよう。
むやみにかっこを外さないこと！

(1) $a(x+y) - b(x+y)$

$(x+y) = A$ とおく

$$\begin{aligned}
 & a(x+y) - b(x+y) \\
 &= aA - bA \\
 &= (a-b)A \\
 &= (a-b)(x+y)
 \end{aligned}$$

} 共通因数 A をくり出す

(2) $(x+y)^2 + 3(x+y) + 2$

$(x+y) = A$ とおく

$$\begin{aligned}
 & (x+y)^2 + 3(x+y) + 2 \\
 &= A^2 + 3A + 2 \\
 &= (A+1)(A+2) \\
 &= (x+y+1)(x+y+2)
 \end{aligned}$$

} かけて2, たして3を
みつける 公式1'

やってみよう

P28 問11

因数分解の解法

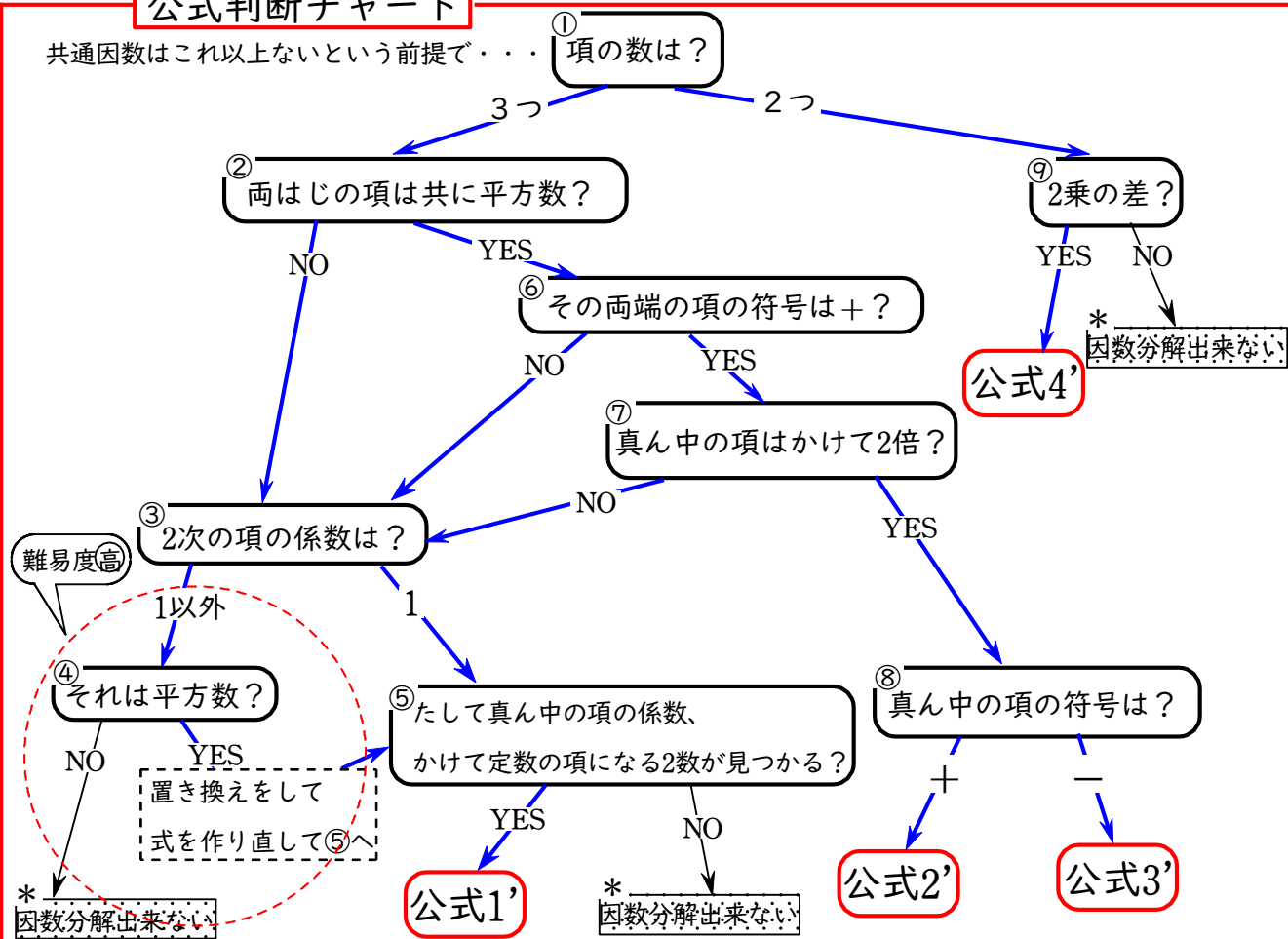
まず初めに必ずチェックすること

- (1) 共通因数があれば共通因数でくくる。
- (2) 項の数が2つか3つの場合、公式を利用出来るときは利用する。

共通因数でくくった後、
または共通因数がなかったとき、
どの公式が利用できるか考える。

公式判断チャート

共通因数はこれ以上ないという前提で・・・



- (3) 項の数が3項より多かったり、はじめからかっこがある場合
置き換えが出来ないか考える。

はじめからかっこがある場合はむやみに外さず、じっくり観察しよう。

- (4) 置き換えが出来たら再び①へ

* 因数分解出来ない式もあります。ただし、高校レベルでは出来る場合もあり。

中学校レベルで、因数分解しなさいという問題で因数分解出来ない式を出題することはほぼありません。

(内は難易度が高いので、あまり出てこないかもしれません。)

公式判断チャートの使い方例

P26 問6 でやってみよう。

(1) $x^2 - 16$

①項の数は? 2つ → ⑨2乗の差? YES → 公式4'
 x^2 と -16 の2項 x と 4 の2乗の差

$$\begin{aligned}
 &x^2 - 16 && \boxed{4'} \quad a^2 - b^2 = (a + b)(a - b) \\
 &= x^2 - 4^2 \\
 &= (x + 4)(x - 4)
 \end{aligned}$$

(2) $x^2 + 8x + 16$

①項の数は? 3つ → ②両はじの項がともに平方数? YES
 x^2 と $8x$ と 16 の3つ x^2 は x の2乗、 16 は 4 の2乗
 → ⑥その両端の項は+? YES → ⑦真ん中の項はかけて2倍? YES
 x^2 , $+16$ $8x = 2 \times x \times 4$
 → ⑧真ん中の項の符号は? + → 公式2'
 $+8x$

$$\begin{aligned}
 &x^2 + 8x + 16 && \boxed{2'} \quad a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2 \\
 &= x^2 + 2 \times x \times 4 + 4^2 \\
 &= (x + 4)^2
 \end{aligned}$$

(3) $x^2 - 8x + 16$

① ~ ⑦までは(2)と同じ → ⑧真ん中の項の符号は? - → 公式3'
 $-8x$

$$\begin{aligned}
 &x^2 - 8x + 16 && \boxed{3'} \quad a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2 \\
 &= x^2 - 2 \times x \times 4 + 4^2 \\
 &= (x - 4)^2
 \end{aligned}$$

(4) $x^2 - 10x + 16$

①項の数は？ 3つ → ②両はじの項が平方数？ YES
 x^2 と $-10x$ と 16 の3つ x^2 は x の2乗、 16 は 4 の2乗
→ ⑥その両端の項の符号は+？ YES → ⑦真ん中の項はかけて2倍？ NO
 x^2 , $+16$ $-10x \neq 2 \times x \times 4$
→ ③2次の項の係数は？ 1 x^2 の係数は1 $かけて+16、たして-10になる2数は-2と-8$
→ ⑤たして真ん中の項の係数、かけて定数の項になる2数見つかる？ YES → 公式1'

$x^2 - 10x + 16$
 $= (x - 2)(x - 8)$

$[1'] x^2 + (a + b)x + ab = (x + a)(x + b)$

内を瞬時に判断できるように練習しよう。

やってみよう

P28 基本の問題、P33 章の問題A 1～5、 P34 章の問題B 1, 2

1章の計算は たくさん問題を解けば解くほど、計算は速くなります。
何度も言いますが、量をこなさなければ出来るようにはなりません！
じっくり家庭学習に取り組める良い機会ととらえて頑張りましょう！