◆分母に根号がある数の分母を、整数になおす方法を考えてみよう。

Q　$\sqrt{2}=1.414$ として、$\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ と $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ の値を比べてみよう。

$$\frac{1}{\sqrt{2}}=1\div\sqrt{2}=1\div1.414=\boxed{0.707\cdots}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}\div2=1.414\div2=\boxed{0.707}$$

$\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ と $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ の 値を比べた結果、ほぼ等しいことがわかります。

さて、どちらの計算が楽でしたか？

わり算では　わる数は小数より整数の方が楽です。

$1\div1.414$

わられる数　わる数

というわけで、根号をふくむ分数では、分母に根号がない形で表すことにする。

どうやって？

$\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=1$ だから、

$\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ に1をかけても大きさは変わらないね。

$$\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{1\times\sqrt{2}}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

根号が外れるのはどんなとき？

$a>0$ のとき

$(\sqrt{a})^2=a$

2乗すれば根号 $\sqrt{\ }$ が外れるね。

分母に根号がある数は、分母と分子に同じ数をかけて、
分母に根号がない形に表すことができる。
分母に根号がない形に表すことを分母を $\boxed{\text{有理化する}}$ という。

P53〈例6〉次の数の分母を有理化しなさい。

(1) $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{2}\times\boxed{\sqrt{3}}}{\boxed{\sqrt{3}\times\sqrt{3}}}$

$=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$

分母分子に同じ数を

かけないと、分数の

大きさが変わってしまうよ。

(2) $\dfrac{3}{2\sqrt{6}}=\dfrac{3\times\boxed{\sqrt{6}}}{2\boxed{\sqrt{6}\times\sqrt{6}}}$

$=\dfrac{{}^{1}\cancel{3}\times\sqrt{6}}{2\times\cancel{6}_{2}}$

$=\dfrac{\sqrt{6}}{4}$

やってみよう

P53　たしかめ５、問5

◆根号をふくむ式の乗法や除法を**くふうして**計算してみよう。

P54〈例7〉 $\sqrt{12}\times\sqrt{20}$

$=2\sqrt{3}\times2\sqrt{5}$

$=2\times2\times\sqrt{3}\times\sqrt{5}$

$=4\sqrt{15}$

根号の中の数はなるべく小さい自然数にしておこう

乗法は　根号の外どうし、中どうしでかけ算できるよ

ペアで根号の外にひとつ出る

$$\begin{array}{r|r} 2 & 12 \\ \hline 2 & 6 \\ \hline & 3 \end{array} \qquad \begin{array}{r|r} 2 & 20 \\ \hline 2 & 10 \\ \hline & 5 \end{array}$$

$\sqrt{12}=2\sqrt{3}$　　$\sqrt{20}=2\sqrt{5}$

$\sqrt{12}$ 、$\sqrt{20}$ はよく出てくるので何度も素因数分解しているうちに、いちいち素因数分解しなくても $2\sqrt{3}$ 、$2\sqrt{5}$ と覚えてしまうよ。

くふうしない場合

$\sqrt{12}\times\sqrt{20}$

$=\sqrt{240}$

$=4\sqrt{15}$

$$\begin{array}{r|r} 2 & 240 \\ \hline 2 & 120 \\ \hline 2 & 60 \\ \hline 2 & 30 \\ \hline 3 & 15 \\ \hline & 5 \end{array}$$

くふうしない場合は、かけ算をして、数を大きくし、それから素因数分解をしているね。素因数分解は数を小さく分けることだから、2度手間だよ。

やってみよう

P54　たしかめ６

根号の中はなるべく数を**大きくしない**ことが鉄則。まずは**かけないで**それぞれ素因数分解をしよう

P54〈例8〉　$\sqrt{15}\times\sqrt{10}$

$=\sqrt{3\times5}\times\sqrt{2\times5}$

$=\sqrt{3\times5\times2\times5}$

$=5\sqrt{6}$

5がペアになったから根号の外に出る。

やってみよう

P54　たしかめ７、問6

P54〈例9〉わり算は分数にして、分母に根号があれば有理化する。

$$\sqrt{18} \div \sqrt{7} = \frac{\sqrt{18}}{\sqrt{7}}$$

$$= \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{7}}$$

$$= \frac{3\sqrt{2} \times \boxed{\sqrt{7}}}{\boxed{\sqrt{7} \times \sqrt{7}}}$$

$$= \frac{3\sqrt{14}}{7}$$

やってみよう

P54　問7

2 根号をふくむ式の加減

◆平方根の加法や減法はどのように計算すればよいか考えてみよう。

Q $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ は $\sqrt{a+b}$ と計算してもよいでしょうか？

根号の中どうしを
たし算してもよい？

具体例で考えてみよう。

$\sqrt{2}+\sqrt{3}$ と $\sqrt{2+3}$ は等しい？

ゆうとさんの考え　　近似値を調べてみよう。

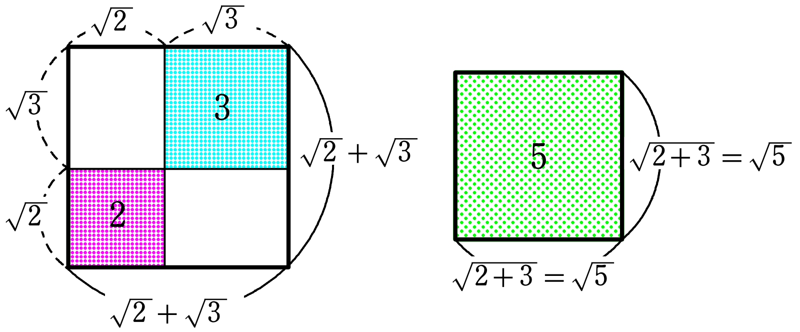
$$\sqrt{2}+\sqrt{3} = 1.414\cdots+1.732\cdots = 3.146\cdots$$

$$\sqrt{2+3} = \sqrt{5} = 2.236\cdots$$

よって、$\sqrt{2}+\sqrt{3} \fallingdotseq \sqrt{2+3}$

さくらさんの考え　正方形の図を使って調べよう。

1辺が $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ の正方形と1辺が $\sqrt{2+3}$ すなわち $\sqrt{5}$ の正方形は合同？



明らかに合同じゃないことがわかるね。

よって、$\sqrt{2}+\sqrt{3} \fallingdotseq \sqrt{2+3}$

$\sqrt{a}+\sqrt{b} \fallingdotseq \sqrt{a+b}$

たし算は根号の中どうしで計算できない！

ただし、$\sqrt{2}+\sqrt{3}$ はこれ以上簡単にすることはできないが、１つの数を表している。

では、根号をふくむ式の加減はどうすればよい？

同じ数の平方根をふくんだ式は、同類項をまとめるのと同じようにして簡単にすることができる。

P55〈例1〉

(1)

$$5\sqrt{2}+3\sqrt{2}$$
$$=(5+3)\sqrt{2}$$
$$=8\sqrt{2}$$

比べてみよう

$$5x+3x$$
$$=(5+3)x$$
$$=8x$$

(2)

$$\sqrt{5}-2\sqrt{5}$$
$$=(1-2)\sqrt{5}$$
$$=-\sqrt{5}$$

比べてみよう

$$x-2x$$
$$=(1-2)x$$
$$=-x$$

やってみよう

P55　たしかめ１

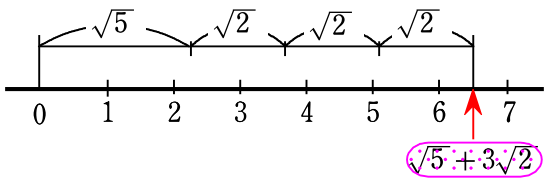
P55〈例2〉

$$4\sqrt{5}+5\sqrt{2}-3\sqrt{5}-2\sqrt{2}$$
$$=(4-3)\sqrt{5}+(5-2)\sqrt{2}$$
$$=\sqrt{5}+3\sqrt{2}$$

比べてみよう

$$4x+5y-3x-2y$$
$$=(4-3)x+(5-2)y$$
$$=x+3y$$

《注意》 $\sqrt{5}+3\sqrt{2}$ は、これ以上簡単な形にならないが、1つの数を表している。



やってみよう

P56　たしかめ２、問1

P56〈例3〉根号の中の数が異なる場合にも、$a\sqrt{b}$ の形に変形することによって、
加法や減法が計算できるようになるものがある。

根号 $\sqrt{\ }$ の中ができるだけ小さい自然数になるように変形する。

$$\sqrt{18}+\sqrt{8}$$
$$=3\sqrt{2}+2\sqrt{2}$$
$$=5\sqrt{2}$$

$$\begin{array}{r|l} 2 & 18 \\ \hline 3 & 9 \\ \hline & 3 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 2 & 8 \\ \hline 2 & 4 \\ \hline & 2 \end{array}$$

やってみよう

P56　たしかめ３、問2

P57〈例4〉分母に根号 $\sqrt{\ }$ があるときは、分母を有理化してから計算する。

$$5\sqrt{2}+\frac{4}{\sqrt{2}}$$
$$=5\sqrt{2}+\frac{4\times\boxed{\sqrt{2}}}{\boxed{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}}$$
$$=5\sqrt{2}+\frac{\cancel{4}^{2}\sqrt{2}}{\cancel{2}_{1}}$$
$$=5\sqrt{2}+2\sqrt{2}$$
$$=7\sqrt{2}$$

やってみよう

P57　問3

3 根号をふくむ式のいろいろな計算

◆分配法則や乗法公式を使って、根号をふくむ式を計算してみよう

P58〈例1〉　分配法則を使って式を簡単にする。

$$\sqrt{3}\times(\sqrt{6}+2)$$
$$=\sqrt{3}\times\sqrt{6}+\sqrt{3}\times 2$$
$$=\sqrt{3}\times(\sqrt{3}\times\sqrt{2})+\sqrt{3}\times 2$$
$$=3\sqrt{2}+2\sqrt{3}$$

$\sqrt{3}\times\sqrt{6}=\sqrt{18}$ として
根号 $\sqrt{\ }$ の中を大きくするのではなく
$\sqrt{3}\times\sqrt{6}=\sqrt{3}\times\sqrt{3}\times\sqrt{2}$ と分けよう
そうすると、$\sqrt{3}\times\sqrt{3}$ でペアができるから根号 $\sqrt{\ }$ が外れるね。

やってみよう

P58　問1

P58〈例2〉　多項式の乗法、乗法公式を使って式を簡単にする。

(1)　$(\sqrt{3}+2)(2\sqrt{3}+1)$
$$=\sqrt{3}\times 2\sqrt{3}+\sqrt{3}\times 1+2\times 2\sqrt{3}+2\times 1$$
$$=6+\sqrt{3}+4\sqrt{3}+2$$
$$=8+5\sqrt{3}$$

$(a+b)(c+d)$
$=ac+ad+bc+bd$

$\sqrt{3}\times 2\sqrt{3}$
$=\sqrt{3}\times\sqrt{3}\times 2$
$=3\times 2$
$=6$

(2)　$(\sqrt{5}+3)(\sqrt{5}-1)$
$$=(\sqrt{5})^2+(3-1)\sqrt{5}-3\times 1$$
$$=5+2\sqrt{5}-3$$
$$=2+2\sqrt{5}$$

$(x+a)(x+b)$
$=x^2+(a+b)x+ab$

$(a\pm b)^2$
$=a^2\pm 2ab+b^2$

$(a+b)(a-b)$
$=a^2-b^2$

やってみよう

P58　問2、問3、P59　問4

◆根号をふくむ式を計算を使って、式の値を考えてみよう

式の値とは・・　式の中の文字に与えられた数を代入して計算した結果をその式の値という。

P59〈例3〉　$x=\sqrt{3}+2$，$y=\sqrt{3}-2$ のとき、x^2-xy の値を求めなさい。

【解法その1】 $\boxed{\text{すぐに代入する方法}}$

$$
\begin{aligned}
&x^2-xy\\
&=(\sqrt{3}+2)^2-(\sqrt{3}+2)(\sqrt{3}-2)\\
&=(3+4\sqrt{3}+4)-(3-4)\\
&=7+4\sqrt{3}-(-1)\\
&=7+4\sqrt{3}+1\\
&=8+4\sqrt{3}
\end{aligned}
$$

【解法その2】 $\boxed{\text{因数分解してから代入する方法}}$

$$
\begin{aligned}
&x^2-xy\\
&=x(x-y)\\
&=(\sqrt{3}+2)\{(\sqrt{3}+2)-(\sqrt{3}-2)\}\\
&=(\sqrt{3}+2)(\sqrt{3}+2-\sqrt{3}+2)\\
&=(\sqrt{3}+2)\times 4\\
&=4\sqrt{3}+8
\end{aligned}
$$

どちらで解いても良いが、
代入する箇所をなるべく
少なくすることがポイント!!

やってみよう

P59　問5、問6

やってみよう

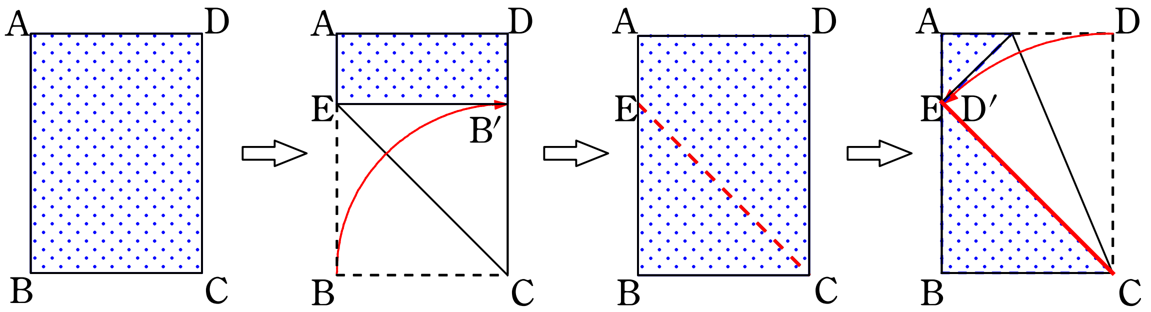
P61　基本の問題、　P62　章の問題A、　P63　章の問題B

おまけのページの豆知識

4 平方根の利用

◆身のまわりにある平方根について考えてみよう

コピー用紙の秘密、知ってる？



『A４判の紙ABCDを上のように折ると、CD’とCEはぴったり重なる』

CD’、CEとは、A４判の紙のどこの長さのこと？

CD’はA４判の紙の長い辺、

CEは、A４判の紙の短い辺を1辺とする正方形の対角線の長さのこと。

A４判の短い辺と長い辺の長さの比はどうなっているということでしょう？

やってみよう

P60　問1

これはB判の紙でも同じだよ。