

2節 根号をふくむ式の計算

① 根号ふくむ式の乗除

◇平方根の乗法はどのように計算すればよいか考えてみましょう。

Q $\sqrt{a} \times \sqrt{b}$ は $\sqrt{a \times b}$ と計算してもよいでしょうか？

根号の中どうしを
かけ算してもよい？

具体的な数で確認してみよう。

$$\begin{array}{lcl} \text{ア} & \sqrt{4} \times \sqrt{25} & \text{と} & \sqrt{4 \times 25} \\ & = 2 \times 5 & & = \sqrt{100} \\ & = 10 & & = \sqrt{10^2} \\ & & & = 10 \end{array}$$

したがって

$$\sqrt{4} \times \sqrt{25} = \sqrt{4 \times 25} \quad \text{が成り立つ。}$$

$$\begin{array}{lcl} \text{イ} & \sqrt{2} \times \sqrt{3} & \text{と} & \sqrt{2 \times 3} \\ & \doteq 1.41421356 \times 1.7320508 & & = \sqrt{6} \\ & \doteq 2.44948973 & & \doteq 2.44949 \end{array}$$

したがって

$$\sqrt{2} \times \sqrt{3} = \sqrt{2 \times 3} \quad \text{が成り立つ。}$$

一般的に

どんな正の数 a 、 b についても、 $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{ab}$ が成り立つ。

根号 $\sqrt{\quad}$ の中どうして
かけ算できる!!

【発展】

証明してみよう。(具体例は教科書P49)

どんな正の数 a 、 b についても、 $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{ab}$ が成り立つ。

〈仮定〉 a 、 b はともに正の数である

〈結論〉 $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{a \times b}$

〈証明〉 左辺 $\sqrt{a} \times \sqrt{b}$ を2乗すると

$$\begin{aligned} (\sqrt{a} \times \sqrt{b})^2 &= (\sqrt{a} \times \sqrt{b}) \times (\sqrt{a} \times \sqrt{b}) \\ &= \sqrt{a} \times \sqrt{b} \times \sqrt{a} \times \sqrt{b} \\ &= (\sqrt{a})^2 \times (\sqrt{b})^2 \\ &= a \times b \end{aligned}$$

$(\sqrt{a})^2 = a$ 、 $(\sqrt{b})^2 = b$

$a \times b$ の平方根は

$\pm \sqrt{a \times b}$

$\sqrt{a} \times \sqrt{b}$ は2乗すると $a \times b$ となる。

すなわち、 $\sqrt{a} \times \sqrt{b}$ は $a \times b$ の平方根2つのうちのひとつである。

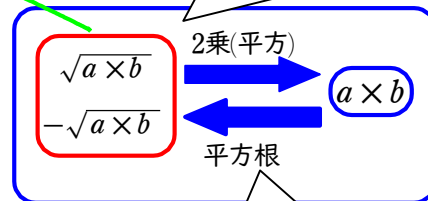
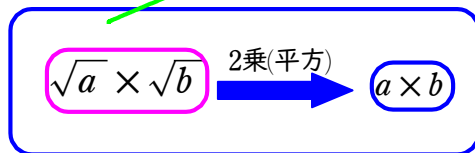
また、 \sqrt{a} 、 \sqrt{b} は正であるから、 $\sqrt{a} \times \sqrt{b}$ は正である。

したがって、 $\sqrt{a} \times \sqrt{b}$ は $a \times b$ の正の平方根であるから、

$\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{a \times b}$ となる。

$\sqrt{a} \times \sqrt{b}$ も $\sqrt{a \times b}$ も2乗すると $a \times b$ になるね

$\sqrt{a \times b}$ と $-\sqrt{a \times b}$ は2乗すると $a \times b$



また、商についても同様に

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}} \text{ が成り立つ。}$$

$a \times b$ の平方根は $\pm \sqrt{a \times b}$ である

かけ算も割り算も根号の中どうして計算出来る!

平方根の積と商

$a > 0, b > 0$ とするとき

$$\text{① } \sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{a \times b} \quad \text{② } \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$$

$\sqrt{a} \times \sqrt{b}$ は、記号 \times をはぶいて $\sqrt{a} \sqrt{b}$ とも書く。同様に、 $a \times \sqrt{b}$ は、 $a \sqrt{b}$ とも書く。

P50 〈例1〉 (1) $\sqrt{3} \times \sqrt{5}$
 $= \sqrt{3 \times 5}$
 $= \sqrt{15}$

(2) $\frac{\sqrt{125}}{\sqrt{5}}$
 $= \sqrt{\frac{125}{5}}$
 $= \sqrt{25}$
 $= \sqrt{5^2}$
 $= 5$

《注意》

$\sqrt{25} = 5$ のように、根号を使わずに表すことができる数は、根号を使わずに表す。

やってみよう

P50 たしかめ1、問1

◆根号のついた数の変形を考えてみよう。

P51 <例2> $\bigcirc\sqrt{\square} \Rightarrow \sqrt{\bigcirc}$ 根号の中に入れる。

$$\begin{aligned} &7\sqrt{2} \\ &= \sqrt{7^2} \times \sqrt{2} \\ &= \sqrt{49} \times \sqrt{2} \\ &= \sqrt{49 \times 2} \\ &= \sqrt{98} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &a\sqrt{b} \\ &= \sqrt{a^2} \times \sqrt{b} \\ &= \sqrt{a^2 \times b} \\ &= \sqrt{a^2 b} \end{aligned}$$

根号の外にあるaは2乗すると
根号の中に入るね。

$$a\sqrt{b} = \sqrt{a^2 b}$$

やってみよう

P51 たしかめ2

P51 <例3> $\sqrt{\bigcirc} \Rightarrow \bigcirc\sqrt{\square}$ 根号の外に出す。

$$\begin{aligned} (1) \quad \sqrt{18} &= \sqrt{2 \times 3 \times 3} \\ &= 3\sqrt{2} \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r} 2) 18 \\ \underline{3} \\ 3 \\ \underline{9} \\ 3 \end{array}$$

根号の中を素因数分解して、
ペアができるとひとつ外に出るね。

$$\sqrt{a \times a \times b} = a\sqrt{b}$$

$$\begin{aligned} (2) \quad \sqrt{108} &= \sqrt{2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3} \\ &= 2 \times 3 \times \sqrt{3} \\ &= 6\sqrt{3} \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r} 2) 108 \\ \underline{2} \\ 54 \\ 2) 54 \\ \underline{54} \\ 0 \\ 3) 27 \\ \underline{27} \\ 0 \\ 3) 9 \\ \underline{9} \\ 0 \\ 3 \end{array}$$

やってみよう

P51 たしかめ3、問2

P52 <例4> 根号の中が分数、小数の場合、根号の中はできるだけ小さい自然数にする。

$$\begin{aligned} (1) \quad \sqrt{\frac{5}{36}} &= \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{36}} \\ &= \frac{\sqrt{5}}{6} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \quad \sqrt{0.03} &= \sqrt{\frac{3}{100}} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{100}} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{10} \end{aligned}$$

やってみよう

P52 問3

◆根号のついた数を変形して、近似値を求めてみよう。

Q $\sqrt{2} = 1.414$ として、次の値を求めてみよう。

(1) $\sqrt{200}$	同じように やってみよう	(2) $\sqrt{20000}$	(3) $\sqrt{0.02}$
$= \sqrt{2 \times 10 \times 10}$		$= \sqrt{2 \times 100 \times 100}$	$= \sqrt{\frac{2}{100}}$
$= 10\sqrt{2}$		$=$	$=$
$= 10 \times 1.414$			
$= 14.14$			

上の3問を比べて気づいたことはあるかな？ ヒント 答の数字の並びに注目してみよう。
これに気づくと、近似値を簡単に求めることができるよ。でもわからなくても、地道に素因数分解すればOK!!

$\sqrt{200}$ 、 $\sqrt{20000}$ 、 $\sqrt{0.02}$ の近似値は、すべて $\sqrt{2}$ と同じ1414の並びになっているね。

では、 $\sqrt{2000}$ はどうでしょう？

$$\begin{aligned} \sqrt{2000} &= \sqrt{2 \times 10 \times 10 \times 10} \\ &= 10\sqrt{2 \times 10} \dots \text{おや？ } \sqrt{2} \text{ と、 } \sqrt{2 \times 10} \text{ は違うね} \dots \end{aligned}$$

もっと素因数分解してみよう……

$$\begin{aligned} &= 10\sqrt{2 \times 2 \times 5} \\ &= 10 \times 2 \times \sqrt{5} \\ &= 20\sqrt{5} \end{aligned}$$

$\sqrt{5} \doteq 2.236$ だから

$$\begin{aligned} &= 20 \times 2.236 \\ &= 44.72 \dots \text{この値は1414の並びにはなっていないね。} \end{aligned}$$

あらためて

ちなみに

$\sqrt{2} = 1.414$	$\sqrt{2000} = 44.72$
$\sqrt{200} = 14.14$	$\sqrt{20} = 4.472$
$\sqrt{20000} = 141.4$	$\sqrt{0.2} = 0.4472$
$\sqrt{0.02} = 0.1414$	$\sqrt{200000} =$ いくつでしょう？

簡単に近似値を求める方法を自力で見つけてみよう。

やってみよう

P52 たしかめ4、問4