3年　２章　平方根　(1)

学習日　　月　　日(　　)

〈この章で学習することがら〉

1年では、小学校では出来なかった小さい数から大きい数のひき算がいつでもできるように、負の数まで数の範囲を広げました。

この章では、今までの数の範囲にはない、2乗して自然数になるとは限らない数やその計算について考えます。

1章で、自然数を2乗した数を**平方数**といったね。
1，4，9，16，25，36，・・
逆に言うと
1 は 1 を2乗した数、
4 は 2 を2乗した数だけど・・
1 と 4 の間にある 2 は何を2乗した数？
そんな数について学習しましょう。

やってみよう

まずは　教科書P38,39について考えてみよう。

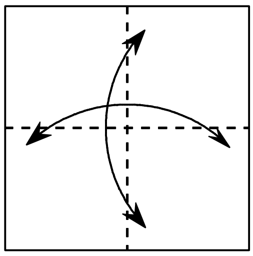
普通の折り紙を準備して面積が半分になる**正方形**を作ってみよう。

長方形じゃダメだよ

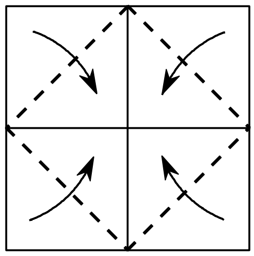
意外に難しいかも？
折り紙が得意な人はかんたん！？

正解は・・次のページ

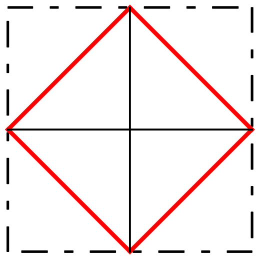
答



①縦横半分に折って
折り目をつけて戻す



②真ん中に向けて
点線で折る



できあがり

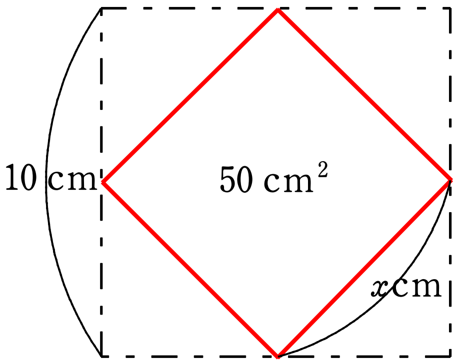
教科書P39の方眼用紙で【面積がちょうど半分の正方形】を書いてみよう。

教科書の方眼用紙は1辺10 cm の正方形なので、面積は $10\times10=100\ (\mathrm{cm}^2)$
その面積が半分、つまり50 cm^2 の正方形が出来たことになる。

では、面積50 cm^2 の正方形の1辺は何 cm でしょう？

1節　平方根

1　平方根



左の図の面積50 cm^2 の正方形の1辺を $x$cm とすると x は正の数で、

$$x^2=50$$

という式が成り立つ。
『x は2乗すると50になる数』である。
実際に、どんな値になるか考えてみましょう。

P39で　**しょうたさん**のように、ものさしで測ってみると、7 cm よりちょっと大きくなりそうだということがわかりますが、細かく測ることは難しそうです。

えりかさんのように、計算で求めようとしてみると・・

電卓を使って2乗すると50になりそうな数を探してみる

$7^2 = 49$

$7.5^2 = 56.25$

50は49より大きいので、7より大きい7.5の2乗を計算してみると
56.25になる。50は49と56.25のあいだにあるから
2乗すると50になる数 x は7と7.5のあいだにある数だとわかる。
そこで、範囲をもう少し狭めてみよう

$7.0^2 = 49$

$7.1^2 = 50.41$

$7.2^2 = 51.84$

50は49と50.41のあいだにあるから
2乗すると50になる数 x は7と7.1のあいだにある数

$7.00^2 = 49$

$7.01^2 = 49.1401$

$7.02^2 = 49.2804$

$7.03^2 = 49.1209$

$7.04^2 = 49.5616$

$7.05^2 = 49.7025$

$7.06^2 = 49.8436$

$7.07^2 = 49.9849$

$7.08^2 = 50.1264$

50は49.9849と50.1264のあいだにあるから
2乗すると50になる数 x は7.07と7.08のあいだにある数

さらに　$7.070^2 \sim 7.079^2$ を計算してみると

$7.070^2 = 49.9849$

$7.071^2 = 49.999041$

$7.072^2 = 50.013184$

50は49.999041と50.013184のあいだにあるから
2乗すると50になる数 x は7.071と7.072のあいだにある数

さらに　$7.0710^2 \sim 7.0719^2$ を計算してみると・・・

$\vdots$

$x = 7.0710678118654752440084436 2\cdots$

というように**2乗すると50になる数 x** はかぎりなく続く小数となる。

この数はひとつの大きさをもつ値であるが、かぎりなく続く小数をすべて書くことは不可能であることから、

この数を $\sqrt{}$ を用いて $\sqrt{50}$ と表し、「**ルート50**」と読む。

この記号 $\sqrt{}$ を**根号**という。

面積が50 cm^2 の正方形の1辺の長さは $\sqrt{50}$ cm である。

◇2乗して a になる数について考えてみよう◇

Q　2乗すると9になる数は？

9は平方数として見覚えがありますね。

というわけで、答えは3　と考えた人は要注意！！

9というのは実は＋9のことですから、

2乗して正の数 9 になる数は ＋3 と、－3 の２つある　のです！

一般に、　　**ある数 x を2乗すると a になるとき、**

すなわち、　**$x^2=a$　であるとき、x を a の平方根という。**

たとえば、

$3^2=9$ 、$(-3)^2=9$

であるから、3も、－3も9の平方根である。

初めの　Q【2乗すると9になる数は？】を言いかえると【9の平方根は？】

となるので、そのような問いには【＋3と－3】と答えなければなりません。

【＋3と－3】を【±3】（プラスマイナス3）と同時に2数を表記する場合があり、

今後はどちらを使ってもかまいません。

ただし、±〇という表記は、あくまでも2つの数を表しているということを忘れずに。

P41〈例1〉（0）81の平方根は？

$9^2=81$ 、$(-9)^2=81$

であるから、**81の平方根は±9**　である。

（1）$\dfrac{16}{81}$ の平方根は？

$\left(\dfrac{4}{9}\right)^2=\dfrac{16}{81}$ 、$\left(-\dfrac{4}{9}\right)^2=\dfrac{16}{81}$

であるから、**$\dfrac{16}{81}$ の平方根は$\pm\dfrac{4}{9}$**　である。

やってみよう

P41問3

$0^2=0$

2乗して0になる数は0だけ。
また、どんな数を2乗しても負の数にはならないから、
負の数には平方根はない。

(+) × (+) = (+)
(−) × (−) = (+)
同符号の積は必ず(+)になる

まとめると

平方根

$\boxed{1}$ 正の数には平方根が２つあって、絶対値が等しく、符号が異なる。

$\boxed{2}$ 0の平方根は0だけである。

〈例1〉、問3は、平方数の平方根を求める問題でした。

では、平方数ではない数の平方根はどのように表すの？

それを解決する記号が $\sqrt{}$ (根号) でしたね。

a が正の数

$a>0$ のとき、a の2つの平方根のうち、

正のほうを $\sqrt{a}$

負のほうを $-\sqrt{a}$

と書く。また $\sqrt{0}=0$ とする。

$\sqrt{}$ の中は必ず正の数ということだよ。
だって、負の数には平方根はないのだから。

P42〈例2〉2の平方根は？

$\sqrt{2}$ と $-\sqrt{2}$ の２つである。 $\pm\sqrt{2}$ と表記しても良い。

注意 ノートへの答え方でやってはいけない例

$\cancel{2=\pm\sqrt{2}}$

$\pm\sqrt{2}$ は**『2の平方根』**であって、**『2』**と等しいわけではない。
“＝”は等しいという意味ですから“＝”を使ってはいけない。

このように書きましょう。

2の平方根は　$\pm\sqrt{2}$　　または百歩譲って・・　$2 \rightarrow \pm\sqrt{2}$　でも良いことにします。

→ですよ！

やってみよう

P42たしかめ１、問4

ここで、もう一度、根号$\sqrt{}$の意味を考えてみましょう。

$a>0$　のとき、a の2つの平方根のうち、
　正のほうを　$\sqrt{a}$
　負のほうを　$-\sqrt{a}$
と書く。また $\sqrt{0}=0$ とする。

↑で、$a=25$　について考えてみよう。

25の平方根のうち、
　正のほうを　$\sqrt{25}$
　負のほうを　$-\sqrt{25}$
と書くことが出来る。

おや？25って平方数でしたね？

ということは、25の平方根は±5では？？

そうなんです。

25の平方根のうち、
　正のほうは 5、
　負のほうは -5
です。

さっき“＝”使ってはいけないって言ってたよね。。

と疑問に思ったあなた！いいところに気づきましたね。

よく観察してみましょう。

25の平方根のうち、正のほうは $\sqrt{25}$

25の平方根のうち、正のほうは 5

どちらも『25の平方根ふたつあるうちの正のほう』についての値です。

ということは、$\sqrt{25}$ と5は等しいということを意味しているので、

$\sqrt{25}=5$ と“＝”を使うのです。

ということで、

25の平方根のうち、
　正のほうは　$\sqrt{25}=5$
　負のほうは　$-\sqrt{25}=-5$
となります。

$\sqrt{25}=5$

$-\sqrt{25}=-5$

このように、根号を使って表した数のなかには、

根号を使わずに表すことが出来るものがあります。

やってみよう

P42　たしかめ２

P42〈例4〉　【根号の中は必ず正の数である】ことを踏まえて・・

$$\sqrt{(-5)^2} = \sqrt{25}$$

$$= \underline{5}$$

$= \sqrt{5^2}$

やってみよう

P42　たしかめ３、問5

3年　２章　平方根　(4)

学習日　　月　　日(　　)

さて、どんな数が根号 $\sqrt{\ }$ を使わずに表すことが出来るのかを理解するために、もう一度、根号の必要性を違う角度から説明してみましょう。

$1^2=1$ ，	$(-1)^2=1$	であるから、1 の平方根は	±1
2	2	2 の平方根は	？
3	3	3	
$2^2=4$ ，	$(-2)^2=4$	であるから、4 の平方根は	±2
5	5	5	
6	6	6	
7	7	7	
8	8	8	
$3^2=9$ ，	$(-3)^2=9$	であるから、9 の平方根は	±3
⋮	⋮	⋮	⋮

1, 4, 9 … は平方数です。

平方数の平方根は根号を使わずに表すことが出来ます。

それに対して、平方数でない数、

例えば、1と4の間にある　『**2**の平方根』すなわち『2乗すると**2**になる数』は

$\bigcirc^2=2$　，$(-\bigcirc)^2=2$　であるから、2　の平方根は $\pm\bigcirc$

この ◯ に入る数は、限りなく続く小数で、それを正確に表す手段として、根号 $\sqrt{\ }$ を使って、2の平方根を $\pm\sqrt{2}$ と表すことにしました。

$1^2=\boxed{1}$ ，$(-1)^2=\boxed{1}$ であるから、$\boxed{1}$ の平方根は $\pm\sqrt{\boxed{1}}=\pm\sqrt{\boxed{1^2}}=\pm 1$

2 の平方根は $\pm\sqrt{2}$

3 の平方根は $\pm\sqrt{3}$

$2^2=\boxed{4}$ ，$(-2)^2=\boxed{4}$ であるから、$\boxed{4}$ の平方根は $\pm\sqrt{\boxed{4}}=\pm\sqrt{\boxed{2^2}}=\pm 2$

5 の平方根は $\pm\sqrt{5}$

6 の平方根は $\pm\sqrt{6}$

7 の平方根は $\pm\sqrt{7}$

8 の平方根は $\pm\sqrt{8}$

$3^2=\boxed{9}$ ，$(-3)^2=\boxed{9}$ であるから、$\boxed{9}$ の平方根は $\pm\sqrt{\boxed{9}}=\pm\sqrt{\boxed{3^2}}=\pm 3$

10 の平方根は $\pm\sqrt{10}$

⋮　⋮　⋮　⋮

$\sqrt{(-●)^2}$ の場合は
P42〈例4〉参照

$\sqrt{a^2}=a$　ただし $a>0$ だよ！
$\sqrt{\ }$ の中が平方数だと $\sqrt{\ }$ が外れる!!

P43〈例6〉　$\sqrt{6}$ 、$-\sqrt{6}$ はどちらも『6 の平方根』すなわち『2乗すると6になる数』

だから　$(\sqrt{6})^2=6$、$(-\sqrt{6})^2=6$　となる。

$\sqrt{a}$ と $-\sqrt{a}$ は2乗すると a になる

$\sqrt{a}$, $-\sqrt{a}$ $\xrightarrow{\text{2乗(平方)}}$ a

a $\xrightarrow{\text{平方根}}$ $\sqrt{a}$, $-\sqrt{a}$

a の平方根は $\pm\sqrt{a}$ である

$a>0$ のとき

$(\sqrt{a})^2=a$

$(-\sqrt{a})^2=a$

$(\pm\sqrt{\ })^2$ で $\sqrt{\ }$ が外れる！
ただし $\sqrt{\ }$ の中は絶対にプラスだよ!!

やってみよう

P43問6

どういうときに $\sqrt{\ }$ が外れる？

まとめ

【根号が外れる瞬間】

$a>0$ のとき

$(\sqrt{a})^2=a$

$(-\sqrt{a})^2=a$

$\sqrt{\ }$ そのものを2乗したとき

$a>0$ のとき

$\sqrt{a^2}=a$

$-\sqrt{a^2}=-a$

$\sqrt{\ }$ の中を2乗したとき

マイナスがつくかつかないかの違いがわかるかな～

かっこと2乗の位置に注目してね！

例　(1)　$\sqrt{16}=\sqrt{4^2}$ ハズレル

$=4$

(2)　$(\sqrt{16})^2=16$ ハズレル

(3)　$(-\sqrt{4^2})^2$ ハズレル

$=(-4)^2$

$=16$

やってみよう

確認問題　次の数を根号を使わずに表しなさい。

(1)　$\sqrt{25}$　　(2)　$-\sqrt{36}$　　(3)　$\sqrt{81}$　　(4)　$-\sqrt{16^2}$

解答は次のページ

前回確認問題の解答

(1) $\sqrt{25}$
$=\sqrt{5^2}$
$=5$

(2) $-\sqrt{36}$
$=-\sqrt{6^2}$
$=-6$

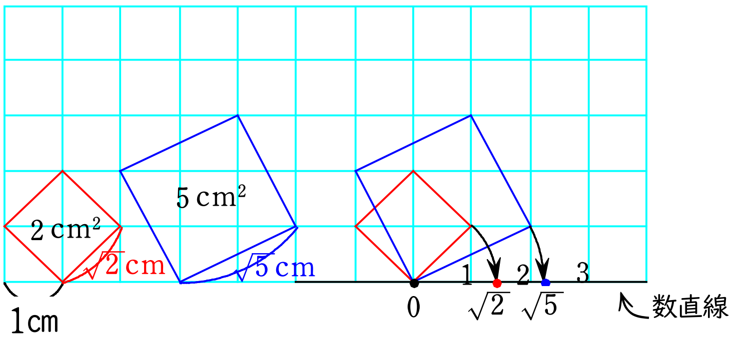
(3) $\sqrt{81}$
$=\sqrt{9^2}$
$=9$

(4) $-\sqrt{16^2}$
$=-16$

◇平方根の大小を調べよう◇

$\sqrt{2}$ と $\sqrt{5}$ の大きさを比べてみよう。

正方形は面積が大きくなるにしたがって、1辺の長さも長くなる。
$\sqrt{2}$ は面積 2 の正方形の1辺の長さ、 $\sqrt{5}$ は面積 5 の正方形の1辺の長さであるから、$\sqrt{2} < \sqrt{5}$ であることがわかる。



一般に、正の数が大きくなるにしたがって、その数の正の平方根も大きくなる。

平方根の大小
$a>0$， $b>0$ で、
$a<b$ ならば　$\sqrt{a}<\sqrt{b}$

P44〈例6〉　つぎの2数の大小を不等号を使って表しなさい。

(1) $\sqrt{5}$ と $\sqrt{7}$

$5<7$より
$\sqrt{5}<\sqrt{7}$

(2) $-\sqrt{5}$ と $-\sqrt{7}$

$-5>-7$より
$-\sqrt{5}>-\sqrt{7}$

(3) 5 と $\sqrt{7}$

$5=\sqrt{5^2}=\sqrt{25}$
$25>7$より
$\sqrt{25}>\sqrt{7}$
よって
$5>\sqrt{7}$

$\sqrt{\ }$ の中どうしで比べればよい。
では５はどうする？　無理矢理 $\sqrt{\ }$ の中にいれてしまえ！
どうやって？　　2乗すれば入るよ！

やってみよう

P44たしかめ４、問7

3年　２章　平方根　（6）　　　学習日　　月　　日(　　)

◇有理数と無理数◇

Q　4と0.4をそれぞれ分数で表してみましょう。

$4=\dfrac{4}{1}$　，　$0.4=\dfrac{4}{10}=\dfrac{2}{5}$ である。

このように、

> a を整数、b を0でない整数としたとき
>
> $\dfrac{a}{b}$ と分数で表すことができる数を　**有理数**　という。
>
> 分数で表すことができない数を　**無理数**　という。

分数で表すことができない数とは？？

これまでに学習してきた数で考えてみると・・

整数 をaとすると、$a=\dfrac{a}{1}$ と表せるので、整数は必ず分数で表すことができるから、

整数は有理数である。

> 有限小数は分数で表すことができるので
>
> **有限小数は有理数**である。

では小数は？

小数には　0.4、3.75のような有限小数と、

0.333333・・・、1.7320508・・・のような無限小数がある。

無限小数には

$0.\dot{3}33333$・・・・・、2.345345345・・・のように、

おなじ数字の並びが限りなくくり返されるような小数がある。

このような無限小数を**循環小数**という。

0.3333・・・$=\dfrac{1}{3}$、　2.345345345・・・$=\dfrac{781}{333}$

> 循環小数の表し方
>
> 0.333・・・$=0.\dot{3}$
>
> 2.345345345・・・$=2.\dot{3}4\dot{5}$
>
> と表す。

このように、*分数で表すことができるので**循環小数は有理数**である。

（*循環小数を分数にする方法はプリントP22【発展】にて解説します）

また、無限小数には、

7.07106781186547524400844362・・・、3.14159265359・・・のように、

規則性なく無限に続く**循環しない小数**がある。

この2つの数に見覚えはないかな？

$7.0710678118654752440084436\cdots = \sqrt{50}$　　教科書P40で出て来ました。

$3.14159265359\cdots = \pi$　　誰かが調べたらしいです。。

これらは分数に表すことができないので**循環しない無限小数は無理数**である。

有理数と無理数

- 数
  - 有理数
    - 整数
      - 正の整数(自然数)
      - 0
      - 負の整数
    - 分数
      - 有限小数（小数）
      - 循環小数（無限小数・小数）
  - 無理数---循環しない無限小数（無限小数・小数）

簡単にいうと、根号$\sqrt{\ }$のついている数で、$\sqrt{\ }$が外れない数と、円周率πが無理数で、それ以外は有理数と考えてよい。

例えば　$\sqrt{3}$ は無理数だけど、$\sqrt{9}$ は $\sqrt{9}=\sqrt{3^2}=3$ なので、有理数。

根号 $\sqrt{\ }$ の中の数が平方数だと、根号 $\sqrt{\ }$ が外れるので、有理数である。

やってみよう

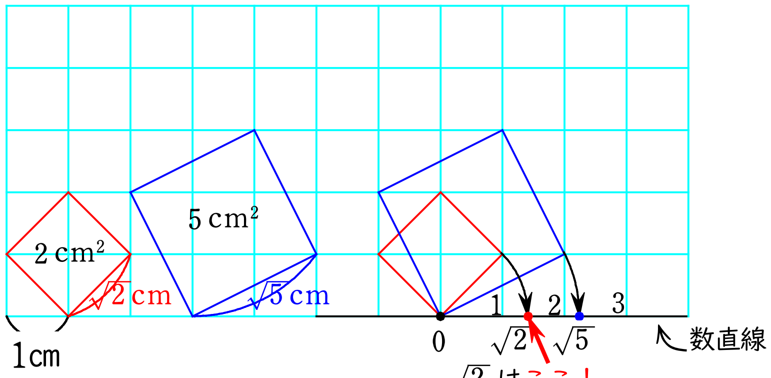
P44　たしかめ５

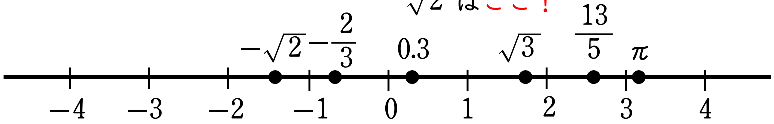
無理数は循環しない無限小数ですが、ひとつの値です。

この値を数直線で**ここ！**と示すことが出来ます。(数直線上に対応する点が存在する)

さてその方法とは？

ちょっと戻って教科書P43Qの図を参照しましょう。





やってみよう P45　問6

ピンポイントで指し示すことが出来なくても
おおよそどれくらいの大きさ(近似値)かがわかればよいので

P45数学のまど
よく出てくる平方根の近似値を覚えておくと便利です

数学のまど　**平方根の近似値のおぼえ方**

$\sqrt{2} \fallingdotseq 1.41421356$ (一夜一夜に　人見ごろ)

$\sqrt{3} \fallingdotseq 1.7320508$ (人なみに　おごれや)

$\sqrt{5} \fallingdotseq 2.2360679$ (富士山ろく　おうむ鳴く)

$\sqrt{6} \fallingdotseq 2.44949$ (似よ，よくよく)

$\sqrt{7} \fallingdotseq 2.64575$ (菜に虫いない)

2 素因数分解

◇根号のついた数が無理数かどうか(根号が外れるか外れないか）を調べる方法について考えてみよう。

無理数は根号が外れないということだね

Q　$\sqrt{196}$ は無理数でしょうか。有理数でしょうか。

n が自然数のとき、$\sqrt{n}$ が無理数かどうかを調べるには、n が自然数の2乗になっているかどうか調べればよい。

プリントP11のまとめをもう一度・・・

どういうときに $\sqrt{\ }$ が外れる？

【根号が外れる瞬間】

$a>0$ のとき

$(\sqrt{a})^2=a$

$(-\sqrt{a})^2=a$

$a>0$ のとき

$\sqrt{a^2}=a$

$-\sqrt{a^2}=-a$

今回使うのはここ！

a^2 を n に置き換えて考えよう。

$\sqrt{196}=\sqrt{\bigcirc^2}$　となれば　根号 $\sqrt{\ }$ が外れる、すなわち有理数であるということ。

では根号の中の自然数196について調べてみよう。

196　　196は偶数だから２で割り切れる

$=2\times 98$　　98も偶数だからさらに２で割り切れる

$=2\times 2\times 49$　　49は7の平方数

$=2\times 2\times 7\times 7$

$=2\times 7\times 2\times 7$　　乗法の交換法則で順番を変える

$=(2\times 7)\times(2\times 7)$　　乗法の結合法則でかっこをつける

$=(2\times 7)^2$　　かっこの中が同じなので累乗の形にまとめる

$=14^2$　　かっこの中を計算する

下に割り進む筆算

$$\begin{array}{r|r} 2 & 196 \\ \hline 2 & 98 \\ \hline 7 & 49 \\ \hline & 7 \end{array}$$

$\times\ \times\ \times\ =196$

枠内のピンクの記号、数字は書かなくて良い。

下に割り進む筆算の方法はプリントP18でも説明します

したがって、$\sqrt{196}=\sqrt{14^2}=14$　となり、$\sqrt{196}$ は有理数である。

◇素因数分解◇

因数：**自然数**がいくつかの自然数の積で表されるとき、そのひとつひとつの数を
もとの数の**因数**という。

P46〈例1〉　12＝2×6　と表されるから、2と6は12の因数である。
12＝3×4　と表されるので、3と4も12の因数である。

素数：2、3、5、7・・・などのように
それより小さい自然数の積で表せない自然数を**素数**という。
素数は**1とその数のほかに約数がない数**である。**ただし、1は素数ではない。**

例えば、2は　1×2　のほかに、自然数の積で表すことは出来ないから素数である。

１とその数自身の積

一方　12は　1×12　のほか、2×6、3×4　などと表すことが出来るので、素数ではない。

やってみよう　P46　問1

素因数：素数である因数を**素因数**という。
素因数分解：自然数を素因数の積に分解することを**素因数分解**という。

素数だけの積の形にすること

例えば、$12=2\times 6$　　　$12=3\times 4$
$=2\times 2\times 3$　　　$=3\times 2\times 2$
$=2^2\times 3$　　　$=2^2\times 3$

となり、12を素因数分解すると、どちらからアプローチしても結果は同じになる。
2×2　のように同じ因数が複数あるときは、**累乗の指数**を使って表す。

P47〈例2〉30を素因数分解すると
$30=2\times 15$
$=2\times 3\times 5$　　したがって　$30=2\times 3\times 5$

〈例3〉28を素因数分解する（下に割り進む筆算)

$$\begin{array}{r|l} 2 & 28 \\ \hline 2 & 14 \\ \hline & 7 \end{array}$$

この14は28÷2の商だよ

28が割り切れる、
出来るだけ
小さい素数で
割っていく

最後に素数になるまで割り進む

したがって　$28=2^2\times 7$

やってみよう

P47　問2　たしかめ I

3年　２章　平方根　(9)　　　　学習日　　月　　日(　　)

◇素因数分解の利用◇

数を素因数分解することによって、その数がどんな素数の積で表せるかがわかる。

これを利用して平方根のいろいろな問題を考えてみよう。

まずは、**144の平方根**を求めてみよう。（P47問３）

　この数にピンときた人はそれでOKだが、

そうでないときは、

ピンとこなかった人へ
144は平方数だよ！

　とりあえず**144を素因数分解をしてみよう。**

$$\begin{array}{r|r} 2 & 144 \\ \hline 2 & 72 \\ \hline 2 & 36 \\ \hline 2 & 18 \\ \hline 3 & 9 \\ \hline & 3 \end{array}$$

$$\begin{aligned} 144 &= 2\times2\times2\times2\times3\times3 \\ &= 2\times2\times3\times2\times2\times3 \\ &= (2\times2\times3)\times(2\times2\times3) \\ &= (2\times2\times3)^2 \\ &= 12^2 \end{aligned}$$

したがって14の平方根は±12

『144を素因数分解しなさい』
という問題の答え方は　最初の１行目だけでわかりますね。
$144=2^4\times3^2$　です！
今回は平方根を求めたいので細かく検証しています。

±忘れていませんか？

右の式のように変形して考えなくても、実は、左の下に割り進む筆算だけで『素因数分解しなさい』という問題も、『平方根を求めなさい』という問題もどちらも解決します！

割る数は
素数だよ！
なるべく
小さい素数
から割って
いこう

$$\begin{array}{r|r} 2 & 144 \\ \hline 2 & 72 \\ \hline 2 & 36 \\ \hline 2 & 18 \\ \hline 3 & 9 \\ \hline & 3 \end{array}$$

その方法は・・

まず、左のように最後が素数になるまで素数だけで割り進む。

　素因数分解しなさいという問題はここで終わり。

$144=2^4\times3^2$

次に、L字型の中にある素数で、ペアを見つける。

$$\begin{aligned} 144 &= (2\times2\times3)^2 \\ &= 12^2 \end{aligned}$$

したがって144の平方根を求めなさいという問題の解答は

144の平方根は±12

P47〈例4〉 $\boxed{\sqrt{63n}\text{ が自然数になるような自然数 }n\text{ のうちで、もっとも小さい値を求めなさい。}}$

この手の問題を解く鍵は、まず前半部分に注目しましょう。

$\boxed{\sqrt{63n}\text{ が自然数になる}}$ とは、根号 $\sqrt{\ }$ が外れるということ。

根号 $\sqrt{\ }$ が外れるのはどんなときでしたか？

【根号が外れる瞬間】

$a>0$ のとき

$(\sqrt{a})^2=a$

$(-\sqrt{a})^2=a$

$a>0$ のとき

$\sqrt{a^2}=a$

$-\sqrt{a^2}=-a$

$\sqrt{\ }$ の中が2乗されているとき

今回も使うのはここ！

a^2 を $63n$ に置き換えて考えよう。

$\sqrt{63n}=\sqrt{a^2}$ となればよい。

ということは、

$63n=a^2$ であるから、63n が ある数a の2乗、すなわちある数の平方数になればよい。

では、63n がどんな数なのか、調べてみよう。

63を素因数分解してみよう

$$63n=63\times n$$
$$=3\times3\times7\times n$$

$$\begin{array}{r|l} 3 & 63 \\ \hline 3 & 21 \\ \hline & 7 \end{array}$$

ここで、63n、すなわち $3\times3\times7\times n$ が平方数になる ということは、2乗、ペアが出来るということだから

ペアを探してみると、$3\times3\times7\times n$

3のペアが1組しかない。では、7のペアを見つけてあげればよいので、7と n をペアにしてあげる。

$3\times3\times7\times n$

すなわち $n=7$ になれば、ペアが出来るね。

$63\times n=3\times3\times7\times n$

$63\times7=3\times3\times7\times7$

$63\times7=(3\times7)^2$ $\qquad n=7$ $\qquad$ 答 7 $\qquad$ これで本当にOK？

あれ？前半部分しか考えていませんね？
後半の自然数 n のうちもっとも小さい値は？

$63n$ の n は自然数でした。

$63n$ がある数の2乗になっていればよいので、いろいろなパターンを考えてみました。

$$63n = \underline{63} \times n = 63 \times 63 = 63^2$$
よって $n = 63$

$$63n = \underline{63} \times n = \underline{3\times3\times7}\times7\times2\times2 = (3\times7\times2)^2$$
よって $n = 7\times2\times2 = 28$

$$63n = \underline{63}\times n = 63\times63\times2\times2 = (63\times2)^2$$
よって $n = 63\times2\times2 = 252$

$$63n = \underline{63}\times n = \underline{3\times3\times7}\times7\times5\times5 = (3\times7\times5)^2$$
よって $n = 7\times5\times5 = 175$

このように、 $63n$ がある数の2乗になるような自然数 n は無数に存在するのです。
そこで、問題の後半にある、自然数 n のうちもっとも小さい値 という条件を
満たす値が今回は 7 ということになるのです。
では、『 $\sqrt{63n}$ が自然数になるような自然数 n を小さい方から３つ答えなさい。』
という問題だとしたら、

実は最初に考えたのはこの一番上の式だよ。
素因数分解では1×1は書かないね。
だって1は素数じゃないから。

$$\underline{63}n = \underline{3\times3\times7}\times n$$
$$\underline{3\times3\times7}\times7\times1\times1 = (3\times7\times1)^2 \qquad n = 7\times1\times1 = 7$$
$$\underline{3\times3\times7}\times7\times2\times2 = (3\times7\times2)^2 \qquad n = 7\times2\times2 = 28$$
$$\underline{3\times3\times7}\times7\times3\times3 = (3\times7\times3)^2 \qquad n = 7\times3\times3 = 63$$
$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

答　7、28、63

となります。

さらに『 $\sqrt{63n}$ が自然数になるような自然数 n のうちもっとも小さい値を求めなさい。
また、そのときの $\sqrt{63n}$ の値を求めなさい。』
という問題に対しては、
$n=7$ がもっとも小さい値だったので、そのときの $\sqrt{63n}$ の値は
$\sqrt{63\times7} = \sqrt{3\times3\times7\times7} = \sqrt{(3\times7)^2} = \sqrt{21^2} = 21$ となり、21 が答えとなります。

やってみよう
P47 問4　P48 基本の問題

【発展】　循環小数を分数になおしてみよう。

分数を小数になおす方法は小学校の時に学習しました。

例えば、$\frac{1}{3}=1\div3=0.33333\cdots$　分子÷分母です。

では逆に　$0.33333\cdots$　を分数になおす方法は？

ちなみに有限小数を分数になおす方法も学習済みですね。
例えば、$0.3=\frac{3}{10}$、$0.67=\frac{67}{100}$、$1.259=\frac{1259}{1000}$
小数点以下の桁数がわかればなおせます。

$\boxed{0.3333\cdots=0.\dot{3}\quad \text{と表記する。}}$

$x=0.\dot{3}$　とおく

両辺を10倍する
もとの式をひくと

$$
\begin{array}{rl}
10x &= 3.333333\cdots \\
-)\quad x &= 0.333333\cdots \\
\hline
9x &= 3
\end{array}
$$

$$x=\frac{3}{9}$$

$$x=\frac{1}{3}$$

よって $0.\dot{3}=\frac{1}{3}$

〈例題〉　$0.\dot{1}\dot{3}$ を分数になおしてみよう。

$x=0.\dot{1}\dot{3}$ とおく

$$
\begin{array}{rl}
100x &= 13.13131313\cdots \\
-)\quad x &= 0.13131313\cdots \\
\hline
99x &= 13
\end{array}
$$

$$x=\frac{13}{99}$$

答　$0.\dot{1}\dot{3}=\frac{13}{99}$