2節　根号をふくむ式の計算

Ⅰ 根号ふくむ式の乗除

◇平方根の乗法はどのように計算すればよいか考えてみましょう。

Q　$\sqrt{a}\times\sqrt{b}$ は $\sqrt{a\times b}$ と計算してもよいでしょうか？

根号の中どうしを
かけ算してもよい？

具体的な数で確認してみよう。

㋐　$\sqrt{4}\times\sqrt{25}$　　と　　$\sqrt{4\times25}$

$=2\times5$　　　　$=\sqrt{100}$

$=10$　　　　$=\sqrt{10^2}$

　　　　$=10$

したがって

$\sqrt{4}\times\sqrt{25}=\sqrt{4\times25}$　が成り立つ。

㋑　$\sqrt{2}\times\sqrt{3}$　　と　　$\sqrt{2\times3}$

$\fallingdotseq1.41421356\times1.7320508$　　　　$=\sqrt{6}$

$\fallingdotseq2.44948973$　　　　$\fallingdotseq2.44949$

したがって

$\sqrt{2}\times\sqrt{3}=\sqrt{2\times3}$　が成り立つ。

一般的に

$\boxed{\text{どんな正の数 } a\text{、} b \text{ についても、} \sqrt{a}\times\sqrt{b}=\sqrt{ab} \text{ が成り立つ。}}$

根号$\sqrt{\ }$の中どうしで
かけ算できる!!

【発展】

証明してみよう。（具体例は教科書P49）

どんな正の数 a 、 b についても、 $\sqrt{a}\times\sqrt{b}=\sqrt{ab}$ が成り立つ。

〈仮定〉 a 、 b 　はともに正の数である　　〈結論〉 $\sqrt{a}\times\sqrt{b}=\sqrt{a\times b}$

〈証明〉　　左辺 $\sqrt{a}\times\sqrt{b}$ を２乗すると

$$(\sqrt{a}\times\sqrt{b})^2=(\sqrt{a}\times\sqrt{b})\times(\sqrt{a}\times\sqrt{b})$$
$$=\sqrt{a}\times\sqrt{b}\times\sqrt{a}\times\sqrt{b}$$
$$=(\sqrt{a})^2\times(\sqrt{b})^2$$
$$=a\times b$$

$(\sqrt{a})^2=a$ 、 $(\sqrt{b})^2=b$

$a\times b$ の平方根は $\pm\sqrt{a\times b}$

$\sqrt{a}\times\sqrt{b}$ は２乗すると $a\times b$ となる。

すなわち、 $\sqrt{a}\times\sqrt{b}$ は $a\times b$ の平方根２つのうちのひとつである。

また、 $\sqrt{a}$ 、 $\sqrt{b}$ は正であるから、 $\sqrt{a}\times\sqrt{b}$ は正である。

したがって、 $\sqrt{a}\times\sqrt{b}$ は $a\times b$ の正の平方根であるから、

$\sqrt{a}\times\sqrt{b}=\sqrt{a\times b}$ 　となる。

$\sqrt{a}\times\sqrt{b}$ も $\sqrt{a\times b}$ も２乗すると $a\times b$ になるね

$\sqrt{a\times b}$ と $-\sqrt{a\times b}$ は2乗すると $a\times b$

$\sqrt{a}\times\sqrt{b}$ $\xrightarrow{\text{2乗(平方)}}$ $a\times b$

$\sqrt{a\times b}$、$-\sqrt{a\times b}$ $\xrightarrow{\text{2乗(平方)}}$ $a\times b$ $\xrightarrow{\text{平方根}}$ $\sqrt{a\times b}$、$-\sqrt{a\times b}$

$a\times b$ の平方根は $\pm\sqrt{a\times b}$ である

また、商についても同様に

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a}{b}}$$

が成り立つ。

かけ算も割り算も根号の中どうしで計算出来る！

平方根の積と商

$a>0, b>0$ とするとき

$\boxed{1}$ $\sqrt{a}\times\sqrt{b}=\sqrt{a\times b}$ 　　$\boxed{2}$ $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\dfrac{a}{b}}$

$\sqrt{a}\times\sqrt{b}$ は、記号×をはぶいて $\sqrt{a}\sqrt{b}$ とも書く。同様に、 $a\times\sqrt{b}$ は、 $a\sqrt{b}$ とも書く。

P50〈例1〉(1) $\sqrt{3}\times\sqrt{5}$

$=\sqrt{3\times5}$

$=\sqrt{15}$

(2) $\dfrac{\sqrt{125}}{\sqrt{5}}$

$=\sqrt{\dfrac{125}{5}}$

$=\sqrt{25}$

$=\sqrt{5^2}$

$=5$

《注意》

$\sqrt{25}=5$ のように、根号を使わずに表すことができる数は、根号を使わずに表す。

やってみよう

P50　たしかめ1、問1

◆根号のついた数の変形を考えてみよう。

P51〈例2〉　$\bigcirc\sqrt{\square}$　⇒　$\sqrt{\bigcirc}$　根号の中に入れる。

$$7\sqrt{2} = \sqrt{7^2}\times\sqrt{2} = \sqrt{49}\times\sqrt{2} = \sqrt{49\times 2} = \sqrt{98}$$

$$a\sqrt{b} = \sqrt{a^2}\times\sqrt{b} = \sqrt{a^2\times b} = \sqrt{a^2 b}$$

根号の外にあるaは2乗すると
根号の中に入るね。

$$\boxed{a\sqrt{b} = \sqrt{a^2 b}}$$

やってみよう
P51　たしかめ２

P51〈例3〉　$\sqrt{\bigcirc}$　⇒　$\bigcirc\sqrt{\square}$　根号の外に出す。

根号の中を素因数分解して、
ペアができるとひとつ外に出るね。

$$\boxed{\sqrt{a\times a\times b} = a\sqrt{b}}$$

(1)　$\sqrt{18} = \sqrt{2\times 3\times 3}$
$= 3\sqrt{2}$

$$\begin{array}{r|r} 2 & 18 \\ \hline 3 & 9 \\ \hline & 3 \end{array}$$

(2)　$\sqrt{108} = \sqrt{2\times 2\times 3\times 3\times 3}$
$= 2\times 3\times\sqrt{3}$
$= 6\sqrt{3}$

$$\begin{array}{r|r} 2 & 108 \\ \hline 2 & 54 \\ \hline 3 & 27 \\ \hline 3 & 9 \\ \hline & 3 \end{array}$$

やってみよう
P51　たしかめ３、問2

P52〈例4〉根号の中が分数、小数の場合、根号の中はできるだけ小さい自然数にする。

(1)　$\sqrt{\dfrac{5}{36}} = \dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{36}} = \dfrac{\sqrt{5}}{6}$

(2)　$\sqrt{0.03} = \sqrt{\dfrac{3}{100}} = \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{100}} = \dfrac{\sqrt{3}}{10}$

やってみよう
P52　問3

◆根号のついた数を変形して、近似値を求めてみよう。

Q　$\sqrt{2}=1.414$ として、次の値を求めてみよう。

(1)　$\sqrt{200}$

$=\sqrt{2\times10\times10}$

$=10\sqrt{2}$

$=10\times1.414$

$=14.14$

同じように
やってみよう

(2)　$\sqrt{20000}$

$=\sqrt{2\times100\times100}$

$=$

(3)　$\sqrt{0.02}$

$=\sqrt{\dfrac{2}{100}}$

$=$

上の3問を比べて気づいたことはあるかな？　ヒント　答の数字の並びに注目してみよう。

これに気づくと、近似値を簡単に求めることができるよ。でもわからなくても、地道に素因数分解すればOK!!

$\sqrt{200}$ 、$\sqrt{20000}$ 、$\sqrt{0.02}$ の近似値は、すべて $\sqrt{2}$ と同じ1414の並びになっているね。

では、$\sqrt{2000}$ はどうでしょう？

$\sqrt{2000}=\sqrt{2\times\underline{10}\times10\times10}$

$=10\sqrt{2\times\underline{10}}$ ・・・おや？ $\sqrt{2}$ と、$\sqrt{2\times10}$ は違うね・・・

もっと素因数分解してみよう・・・

$=10\sqrt{2\times\underline{2\times5}}$

$=10\times2\times\sqrt{5}$

$=20\sqrt{5}$

$\sqrt{5}\fallingdotseq2.236$　だから

$=20\times2.236$

$=44.72$　・・・この値は1414の並びにはなっていないね。

あらためて

$\sqrt{2}=$　1.414

$\sqrt{200}=$　14.14

$\sqrt{20000}=$　141.4

$\sqrt{0.02}=0.1414$

ちなみに

$\sqrt{2000}=44.72$

$\sqrt{20}=4.472$

$\sqrt{0.2}=0.4472$

$\sqrt{200000}=$　いくつでしょう？

簡単に近似値を求める方法を自力でみつけてみよう。

やってみよう

P52　たしかめ４、問4