〈この章で学習することがら〉

1年では、1次方程式の解き方、2年では連立方程式の解き方を学びました。

この章では、文字の種類は１つで、次数が２の方程式について、どのように解けばよいかを考え、方程式が利用できる問題の場面をさらに広げていきましょう。

1節　2次方程式とその解き方

1　2次方程式

1年で学習した1次方程式は

例えば　$2x+3=-7$　は、移行して整理すると、

$2x+10=0$　となり、　(1次式)$=0$　の形に変形できる。

それに対して、2次方程式は　移行して整理すると、

(2次式)$=0$

の形に変形できる方程式のことである。

例えば　$x(12-x)=34$　は、展開し、移行して整理すると、

$12x-x^2=34$

$x^2-12x+34=0$

となり、左辺は x についての2次式なので、この方程式は2次方程式である。

移行して整理することによって、

(2次式)$=0$

の形に変形できる方程式を**2次方程式**という。

x についての**２次方程式の一般式**は次のように表される。

$$ax^2+bx+c=0 \quad (ただし，a \neq 0)$$

a =0だと2次方程式にならないね

P68〈例1〉　方程式　$3x^2-4x=x^2$　は　移行して整理すると、

$3x^2-x^2-4x=0$

$2x^2-4x=0$

となるから、2次方程式である。

このとき、$a=2$, $b=-4$, $c=0$ である。

２次方程式　$x^2-12x+34=0$　では、$a=1$, $b=-12$, $c=34$ である。

やってみよう

P68　たしかめ１、問１

◆2次方程式を成り立たせる文字の値について考えてみよう

Q　$x^2-12x+32=0$ の x に4，8を代入し、方程式が成り立つかどうか調べてみよう。

$x=4$ のとき

$$
\begin{aligned}
(\text{左辺}) &= 4^2-12\times4+32\\
&=16-48+32\\
&=0 \quad =(\text{右辺})
\end{aligned}
$$

したがって、$x=4$ のとき、方程式は成り立つ。

$x=8$ のとき

$$
\begin{aligned}
(\text{左辺}) &= 8^2-12\times8+32\\
&=64-96+32\\
&=0 \quad =(\text{右辺})
\end{aligned}
$$

したがって、$x=8$ のとき、方程式は成り立つ。

代入すると成り立つ値

2次方程式を成り立たせる文字の値をその方程式の**解**という。

上のQで調べたように、4，8 はどちらも2次方程式 $x^2-12x+32=0$ の解である。

2次方程式の解をすべて求めることを2次方程式を**解く**という。

やってみよう

P69　たしかめ２

上のQやたしかめ２のように解の選択肢があれば、代入して方程式(等式)が成り立つかどうかを調べればよかったが、解の選択肢ないときは、どのように解けばよいのでしょう。

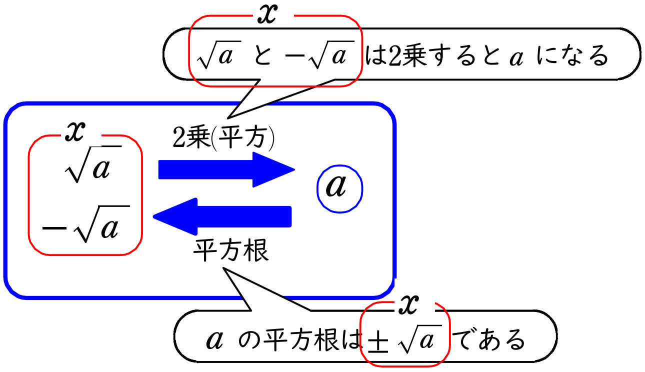
2次方程式の解き方はおもに次の3つがある

- 平方根の考えを使った解き方（プリントP3～7）
- 解の公式を利用する方法（プリントP8～11）
- 因数分解を利用する方法（プリントP12～13）

2 平方根の考えを使った解き方

平方根の考えとは？

ある数 x を2乗すると a になるとき、
すなわち、　$x^2=a$　**であるとき、x を a の平方根という。**



x は a の平方根だから、x は $\sqrt{a}$ と $-\sqrt{a}$ に等しい。

式で表すと、$x=\pm\sqrt{a}$

すなわち、2次方程式　$x^2=a$　の解は $\pm\sqrt{a}$ である。

$$x^2=a$$
$$x=\pm\sqrt{a}$$

◆ $ax^2+c=0$ の形をした2次方程式の解き方◆

2次方程式の一般式 $ax^2+bx+c=0$ で、$b=0$

すなわち、

x^2 の項と、定数項しかない2次方程式　$ax^2+c=0$　の場合、

平方根の考えを使って解くことができる。

$$ax^2+c=0$$
$$ax^2=-c$$
$$x^2=-\frac{c}{a}$$
$$x=\pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$$

ただし、$-\frac{c}{a}>0$

すなわち、$a>0$、$c<0$

または $a<0$、$c>0$

P70〈例1〉

（1）$x^2-9=0$

$x^2=9$

$x=\pm 3$

（2）$3x^2-24=0$

$3x^2=24$

$x^2=8$

$x=\pm\sqrt{8}$

$x=\pm 2\sqrt{2}$

やってみよう

P70　たしかめ１、問1　もっと練習！

◇ $(x+▲)^2=●$ の形をした2次方程式の解き方◇

$(x+▲)^2=●$ の形をした2次方程式は、かっこの中をひとまとまりのものとみて、平方根の考えを使って解くことができる。

$(x+▲)^2=●$

$\boxed{}^2=●$

$\boxed{}=\pm\sqrt{●}$

$x+▲=\pm\sqrt{●}$

$x=-▲\pm\sqrt{●}$

P71〈例2〉 $(x+2)^2=64$

$x+2=\pm 8$

$x+2=8$　，　$x+2=-8$

$x=8-2$　，　$x=-8-2$

$x=6$　，　$x=-10$

〈例3〉 $(x-3)^2-5=0$

$(x-3)^2=5$

$x-3=\pm\sqrt{5}$

$x=3\pm\sqrt{5}$

やってみよう

P71　たしかめ２、問2、もっと練習！

◆$x^2+px+q=0$ の形をした2次方程式の解き方◆

$x^2+px+q=0$ の形をした2次方程式、すなわち、x^2 の係数が１である2次方程式は $(x+▲)^2=●$ の形に変形すれば、平方根の考えを使って解くことができる。

平方完成

x^2+px を $(x+▲)^2$ のような平方の形に変形することを平方完成という。

例えば　x^2+6x を $(x+▲)^2$ の形に変形する（ここでは因数分解したい）のに足りない項があるね。

$$x^2+6x+\boxed{} \quad \cdots①$$
$$=(x+▲)^2$$

この$\boxed{}$と▲に何が入ればよいでしょう？

ここで逆算して考えてみましょう。

$$(x+▲)^2$$
$$=x^2+2\times▲\times x+▲^2 \quad \cdots②$$

$(x+▲)^2$ を展開したよ

①，②はともに $(x+▲)^2$ だから等しい。係数を比べてみよう。

$$x^2+6\ x+\boxed{}$$
$$=x^2+2\times▲\times x+▲^2$$

▲は　6の半分、すなわち　$6\times\frac{1}{2}$ ということだ。

▲は2倍すると6になる数だから、3だね。

すると、$\boxed{}$ は▲を2乗した数、すなわち 3^2 だから9だということがわかる。

というわけで、

$$x^2+6x+\boxed{9}$$
$$①\times\frac{1}{2} \quad ②2乗$$
$$=(x+3)^2$$

平方完成は2行を並べて
下から埋めていこう

x^2+6x は、9 を足せば、$(x+3)^2$ に変形できる。

【平方完成の練習】

次の$\boxed{}$にあてはまる正の数を書きなさい。

(1) $x^2-16x+\boxed{}$ ②
$=(x-\boxed{})^2$ ①

(2) $x^2+8x+\boxed{}$ ②
$=(x+\boxed{})^2$ ①

(3) $x^2-10x+\boxed{}$ ②
$=(x-\boxed{})^2$ ①

(4) $x^2+5x+\boxed{}$ ②
$=(x+\boxed{})^2$ ①

(5) $x^2-7x+\boxed{}$ ②
$=(x-\boxed{})^2$ ①

【解答】は次のページ

p を使って平方完成してみよう。

$x^2+px+\boxed{\left(\frac{p}{2}\right)^2}$ ②

$\times\frac{1}{2}$　2乗

$=(x+\boxed{\frac{p}{2}})^2$ ①

P72〈例4〉　$x^2+6x-1=0$　を平方完成を利用して解いてみよう。

$x^2+6x-1=0$　-1を移行する

$x^2+6x\quad=1$

左辺は平方完成

$x^2+6x+\boxed{9}=1+\boxed{9}$ ＊

$(x+\boxed{3})^2=\boxed{10}$

左辺のx^2+6x を平方完成させるために両辺に$\boxed{\text{同じ数}}$をたす ＊

右辺は計算する

等式を保つために同じ数を両辺にたすよ。

$x+3=\pm\sqrt{10}$

$x=-3\pm\sqrt{10}$

やってみよう

P72　たしかめ３、問3

P73〈例5〉　$x^2+8x=9$　を解きなさい。

埋めていく順番は

下の①（8の$\frac{1}{2}$）

次に上の②（①の2乗）

$x^2+8x=9$

$x^2+8x+\boxed{16}=9+\boxed{16}$ ②

$(x+\boxed{4})^2=\boxed{25}$ ①

$x+\boxed{4}\quad=\pm\boxed{5}$

$x=\boxed{-4\pm5}$

$x=\boxed{-4-5}$, $x=\boxed{-4+5}$

$x=\boxed{-9}$, $x=\boxed{1}$

やってみよう

P73　たしかめ４、問4

◆ $x^2+px+q=0$ で、 p が奇数の場合の2次方程式◆

これまでは x の係数 p が偶数の場合を考えました。

平方完成するのにまず x の係数 p の半分を考えたので p が偶数である場合は計算が比較的楽でしたが、

p が奇数になるとどうなるでしょう。

P73〈例6〉 $x^2+3x+1=0$ 　を解きなさい。

$$x^2+3x+1=0$$

$$x^2+3x+\frac{9}{4}=-1+\frac{9}{4}$$

半分　2乗

$$\left(x+\frac{3}{2}\right)^2=\frac{5}{4}$$

$$x+\frac{3}{2}=\pm\frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$x=-\frac{3}{2}\pm\frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$x=\frac{-3\pm\sqrt{5}}{2}$$

x の係数が奇数の場合、分数が出てくるね。

分母が同じなので1つの分数にしよう。

やってみよう

P73　たしかめ５

平方完成での解法は x^2 の係数が1であるときに有効です。

では x^2 の係数が1でない場合どうすればよいでしょう。次のページで考えていきましょう。

【平方完成の練習の解答】

次の□にあてはまる正の数を書きなさい。

(1)　$x^2-16x+\boxed{64}$ ②
$=(x-\boxed{8})^2$ ①

(2)　$x^2+8x+\boxed{16}$ ②
$=(x+\boxed{4})^2$ ①

(3)　$x^2-10x+\boxed{25}$ ②
$=(x-\boxed{5})^2$ ①

(4)　$x^2+5x+\boxed{\frac{25}{4}}$ ②
$=(x+\boxed{\frac{5}{2}})^2$ ①

(5)　$x^2-7x+\boxed{\frac{49}{4}}$ ②
$=(x-\boxed{\frac{7}{2}})^2$ ①

3 2次方程式の解の公式

◆2次方程式 $ax^2+bx+c=0$ を解いてみよう◆

2次方程式 $ax^2+bx+c=0$ は x^2 の係数が1ではないが、等式の性質を使って、両辺を x^2 の係数 a でわれば、$x^2+px+q=0$ の形になり、平方完成の形で解くことができる。

$3x^2+5x+1=0$		$ax^2+bx+c=0$
	両辺を x^2 の係数でわる	
$x^2+\frac{5}{3}x+\frac{1}{3}=0$		$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$
	定数項を移行する	
$x^2+\frac{5}{3}x=-\frac{1}{3}$		$x^2+\frac{b}{a}x=-\frac{c}{a}$
$x^2+\frac{5}{3}x+\left(\frac{5}{6}\right)^2=-\frac{1}{3}+\left(\frac{5}{6}\right)^2$		$x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2=-\frac{c}{a}+\left(\frac{b}{2a}\right)^2$
$\times\frac{1}{2}$　2乗	平方完成	$\times\frac{1}{2}$　2乗
$\left(x+\frac{5}{6}\right)^2=-\frac{1}{3}+\frac{25}{36}$		$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=-\frac{c}{a}+\frac{b^2}{4a^2}$
$\left(x+\frac{5}{6}\right)^2=\frac{13}{36}$		$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{-4ac+b^2}{4a^2}$
	平方根の考えから	
$x+\frac{5}{6}=\pm\sqrt{\frac{13}{36}}$		$x+\frac{b}{2a}=\pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}$
$x+\frac{5}{6}=\pm\frac{\sqrt{13}}{6}$		$x+\frac{b}{2a}=\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$
$x=-\frac{5}{6}\pm\frac{\sqrt{13}}{6}$		$x=-\frac{b}{2a}\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$
	すなわち解は	
$x=\frac{-5\pm\sqrt{13}}{6}$		① $x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

①の式に a, b, c を代入して計算すれば解がすぐに出てくるので、今後はこの式を公式として活用しよう。この式が【解の公式】というもので、2次方程式はこの公式を使えばどんな場合も解ける万能選手である。

2次方程式の解の公式

2次方程式　$ax^2+bx+c=0$ の解は

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

◆解の公式を使って、2次方程式を解いてみよう◆

P75〈例1〉解の公式の使い方

2次方程式の解の公式

2次方程式　$ax^2+bx+c=0$ の解は

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$2x^2-3x\boxed{-1}=0$$

$a=2$、$b=-3$、$c=\boxed{-1}$

$$x=\frac{-(-3)\pm\sqrt{(-3)^2-4\times2\times(\boxed{-1})}}{2\times2}$$

$$=\frac{3\pm\sqrt{9+8}}{4}$$

$$=\frac{3\pm\sqrt{17}}{4}$$

したがって　$x=\dfrac{3\pm\sqrt{17}}{4}$

やってみよう

P75　たしかめ１、問1

P76〈例2〉解の公式を使って、約分するパターン

$$x^2+4x-2=0$$

$a=1$,$b=4$,$c=-2$ を解の公式に代入すると

$$x=\frac{-4\pm\sqrt{4^2-4\times1\times(-2)}}{2\times1}$$

$$=\frac{-4\pm\sqrt{16+8}}{2}$$

$$=\frac{-4\pm\sqrt{24}}{2}$$

$$=\frac{-4\pm4\sqrt{6}}{2}$$

$$=\frac{\cancel{2}(-2\pm2\sqrt{6})}{\cancel{2}}$$

$$=-2\pm2\sqrt{6}$$

したがって、$x=-2\pm2\sqrt{6}$

2次方程式がどんなときに約分しなければならないパターンなのか、実はわかるんですよ。
さてそれはどんなときでしょう？

このプリントP11【発展】で解説します

やってみよう

P76　たしかめ２

P76〈例3〉解の公式を使って、根号が外れるパターン

$2x^2+5x-3=0$

$a=2$, $b=5$, $c=-3$　を解の公式に代入すると

$$x=\frac{-5\pm\sqrt{5^2-4\times2\times(-3)}}{2\times2}$$

$$=\frac{-5\pm\sqrt{25+24}}{4}$$

$$=\frac{-5\pm\sqrt{49}}{4}$$

$$=\frac{-5\pm7}{4}$$

$$x=\frac{-5+7}{4},\ x=\frac{-5-7}{4}$$

したがって、　$x=\frac{1}{2}, x=-3$

やってみよう

P76　たしかめ３

問2　もっと練習！

【発展】　2次方程式 $ax^2+bx+c=0$　は、x の係数 b が偶数のとき、

解の公式を使って解くと、必ず約分しなければならないパターンになります。

そのことを証明してみましょう。

b が偶数であることから、b' を整数とすると、$b=2b'$ とおくことができる。

$ax^2+2b'x+c=0$　を解の公式を使って解くと、

$$x=\frac{-2b'\pm\sqrt{(2b')^2-4ac}}{2a}$$

$$=\frac{-2b'\pm\sqrt{4b'^2-4ac}}{2a}$$

$$=\frac{-2b'\pm\sqrt{4(b'^2-ac)}}{2a}$$

$$=\frac{-2b'\pm2\sqrt{b'^2-ac}}{2a}$$

$$=\frac{\cancel{2}(-b'\pm\sqrt{b'^2-ac})}{\cancel{2}a}$$

$$=\frac{-b'^2\pm\sqrt{b'^2-ac}}{a}$$

b' は b の半分だよ。

したがって　2次方程式 $ax^2+2b'x+c=0$ の解は　②　$x=\dfrac{-b'\pm\sqrt{b'^2-ac}}{a}$

すなわち　x の係数が偶数である2次方程式は必ず約分出来る。

というわけで、今後 x の係数が偶数のとき、

2次方程式の解の公式　x の係数偶数バージョン　として②の式を活用してもよい。

余裕がある人だけでOK

2次方程式の解の公式　x の係数偶数バージョン

2次方程式　$ax^2+2b'x+c=0$ の解は

$$x=\frac{-b'\pm\sqrt{b'^2-ac}}{a}$$

やってみよう

P76　たしかめ２　を　x の係数偶数バージョンの解の公式で解いてみよう。

3年　３章　2次方程式　（6）　　学習日　月　日(　)

4 因数分解による解き方

◆因数分解を使って、2次方程式を解いてみよう◆

Q　2次方程式 $(x-4)(x-8)=0$ の解は、どのように考えれば求められるでしょうか。

$(x-4)$ と $(x-8)$ をかけて 0 になる、すなわち、2数の積が 0 になるのは、どんなときでしょう？

2数の積が 0 となるのは、一方が 0 のとき。

2次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の左辺が因数分解できるときは、下のことを利用して、2次方程式を解くことができる。

2つの数をA,Bとするとき、
AB=0　ならば　A=0　または　B=0

P77〈例1〉　初めから左辺が因数分解されていて、右辺が 0 のパターン

$$(x-4)(x-8)=0$$

$x-4=0$　または　$x-8=0$

$x=4$　　　$x=8$

したがって解は　$x=4, x=8$

やってみよう

P77　たしかめ１、問1

左辺が因数分解されていて、
右辺が0になっている問題だね

P78〈例2〉　右辺は0で、左辺を自分で因数分解するパターン

$x^2-6x+5=0$

$(x-1)(x-5)=0$

$x-1=0$　または　$x-5=0$

$x=1,\quad x=5$

やってみよう

P78　たしかめ２

P78〈例3〉　右辺は0で、左辺を自分で因数分解するパターン　（平方に因数分解）

$x^2+6x+9=0$

$(x+3)^2=0$

$x+3=0$

$x=-3$

$(x+3)^2=0$

$x+3=0$　または　$x+3=0$

$x=-3$，　$x=-3$

同じ値がふたつは不要。だからひとつでよい。

このような解を重解という。

やってみよう

P78　たしかめ３、問2、問3、問4

因数分解での解き方のポイントは

左辺はかけ算の形で、右辺は必ず0!!

だから問3（1）は要注意！

5 いろいろな2次方程式

2次方程式はおもに次の3つの方法で解くことができました。

①因数分解で解く方法
②平方根の考えによって解く方法（平方完成）
③解の公式を使って解く方法

では、どんなときにどの方法で解くとよいのか研究してみよう。

Q 2次方程式　$x^2-10x-75=0$　を上の①～③の方法で解いてみましょう。

①因数分解で解く方法

$$x^2-10x-75=0$$
$$(x+5)(x-15)=0$$
$$x+5=0,\ x-15=0$$
$$x=-5,\ x=15$$

②平方完成で解く方法

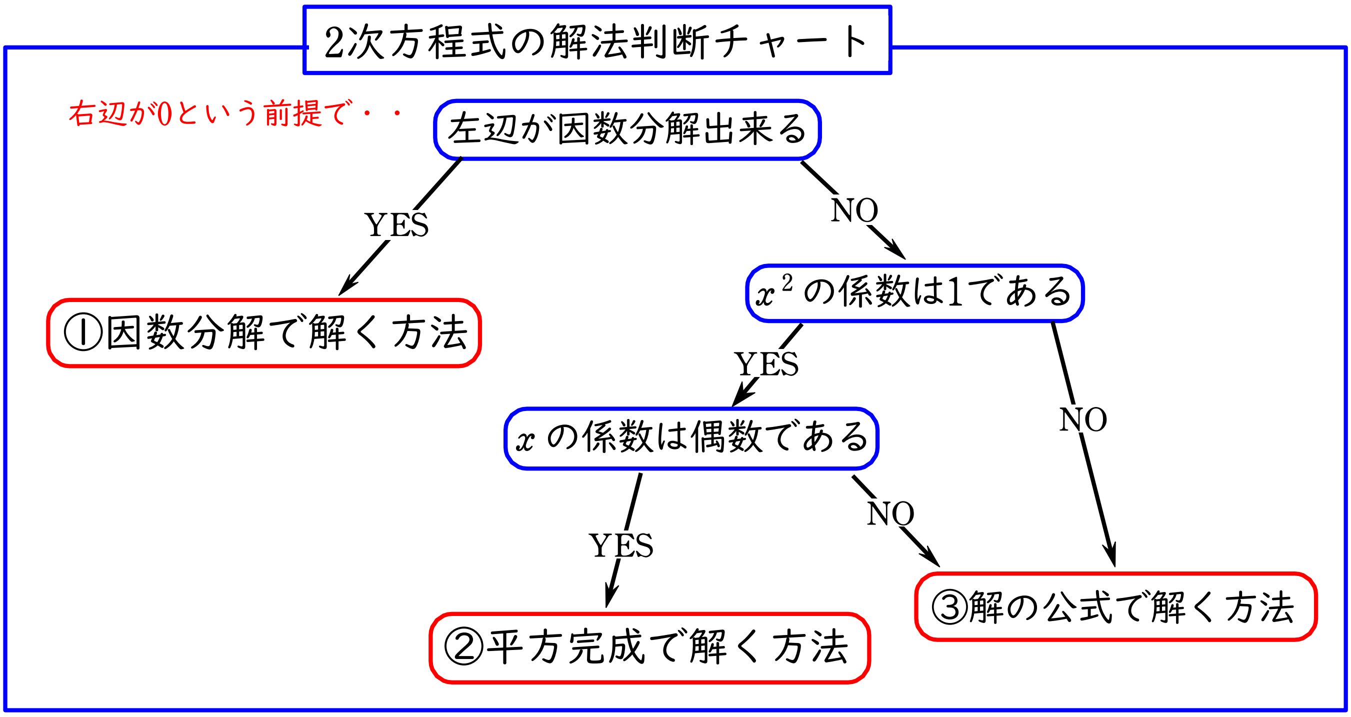
$$x^2-10x-75=0$$
$$x^2-10x=75$$
$$x^2-10x+25=75+25$$
$$(x-5)^2=100$$
$$x-5=\pm10$$
$$x-5=10,\ x-5=-10$$
$$x=15,\ x=-5$$

③解の公式で解く方法

$$x^2-10x-75=0$$
$$x=\frac{-(-10)\pm\sqrt{(-10)^2-4\times1\times(-75)}}{2\times1}$$
$$=\frac{10\pm\sqrt{100+300}}{2}$$
$$=\frac{10\pm\sqrt{400}}{2}$$
$$=\frac{10\pm20}{2}$$
$$=\frac{30}{2},\ \frac{-10}{2}$$
$$x=15,\ x=-5$$

どの方法で解いても解は同じになる。
今回はどれが簡単でしょう？
なるべく簡単な方法を探しましょう。

どの方法がよいか、自分で見つけるのが一番ですが、見つけられない人のために・・・



因数分解が出来るのに、すぐに因数分解できるかどうか判断出来ないこともあります。
そのときは、計算が少し大変ですが、万能選手の　③解の公式　で解きましょう。

やってみよう

P79　問1

どの方法で解くか、
判断基準は何だったか、わけが説明出来る？

3年　３章　2次方程式　（8）　　　　　　学習日　　月　　日(　　)

いろいろな2次方程式を解いてみよう

P79〈例1〉　（2次式）$\underline{=0}$　でない2次方程式

$$(x-4)(x+1)=-6$$
$$x^2-3x-4=-6$$
$$x^2-3x+2=0$$
$$(x-1)(x-2)=0$$
$$x=1,x=2$$

右辺が0でない2次方程式

↓

右辺を0に変形してから解く

やってみよう

P79　問2

P80〈例2〉　解が与えられた2次方程式の係数を求める問題

2次方程式 $x^2+ax+b=0$ の解が $2,3$ のとき、a と b の値をそれぞれ求めなさい。

方程式の解とは**代入すると等式が成り立つ値**のことであるから、

与えられた2次方程式の x に 2 と 3 をそれぞれ代入することによって、

a,b についての　2元1次方程式が出来るので、それらを連立方程式として解けばよい。

【解答】

$x=2$ を $x^2+ax+b=0$ に代入すると

$$2^2+2a+b=0$$

すなわち

$$2a+b=-4 \quad \cdots①$$

$x=3$ を $x^2+ax+b=0$ に代入すると

$$3^2+3a+b=0$$

すなわち

$$3a+b=-9 \quad \cdots②$$

$$\begin{cases} 2a+b=-4 & \cdots① \\ 3a+b=-9 & \cdots② \end{cases}$$

①－②

$$\begin{array}{rrcr} & 2a+b & = & -4 \\ -) & 3a+b & = & -9 \\ \hline & -a & = & 5 \end{array}$$

$$a=-5$$

$a=-5$ を①に代入

$$2\times(-5)+b=-4$$
$$-10+b=-4$$
$$b=6$$

答　$a=-5,b=6$

やってみよう

P80　問3、基本の問題